KKU Res.j. 2014; 19(2) : 233-244
http://resjournal.kku.ac.th

การหาค่าเหมาะที่สุดสองขั้นตอนแบบหลายเป้าหมายของโครงสร้างแบบแผ่นโดยใช้วิธีเรียนรู้แบบเพิ่มพูนโดยอาศัยกลุ่มประชากร

Multiobjective two-stage optimization of a plate structure using a population-based incremental learning method

ธวัฒน์ชัย คุณะโคตร[1] และสุจินต์ บุรีรัตน์[2]*
Tawatchai Kunakote[1] and Sujin Bureerat[2]*

[1]สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม
[2]ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น
**Correspondent author: kunakote@yahoo.com*

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอกระบวนการออกแบบ 2 ขั้นตอนแบบหลายเป้าหมายและทำการประยุกต์ใช้วิธีเรียนรู้แบบเพิ่มพูนโดยอาศัยกลุ่มประชากรแบบหลายเป้าหมาย (Multiobjective Population-Based Incremental Learning, MOPBIL) กับการหาค่าเหมาะที่สุด 2 ขั้นตอนแบบหลายเป้าหมายของโครงสร้างแบบแผ่น ซึ่งประกอบด้วย ขั้นตอนแรก คือ การหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดหรือขั้นตอนการออกแบบเชิงแนวคิดซึ่งดำเนินการร่วมกับวิธีตัวกรองเอลิเมนต์พื้น (Ground Element Filtering, GEF) เพื่อลดจำนวนของตัวแปรออกแบบทอพอโลยีพร้อมทั้งป้องกันการเกิดตาหมากรุกบนโครงสร้าง และขั้นตอนที่ 2 คือ การหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุดซึ่งเป็นขั้นตอนการปรับปรุงสมรรถนะของโครงสร้างจากขั้นตอนแรก และผลลัพธ์จากการตั้งค่าพารามิเตอร์ที่แตกต่างกันของวิธี MOPBIL ในการหาผลเฉลยของการออกแบบทั้ง 2 ขั้นตอน คือ ขอบหน้าพาเรโต ทอพอโลยี และ ขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุดของโครงสร้าง จะถูกนำมาเปรียบเทียบเพื่อประเมินประสิทธิภาพของวิธีเรียนรู้แบบเพิ่มพูนโดยอาศัยกลุ่มประชากร จากผลการทดสอบแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีเรียนรู้แบบเพิ่มพูนโดยอาศัยกลุ่มประชากร สำหรับการออกแบบ 2 ขั้นตอน และผลลัพธ์จากการตั้งค่าพารามิเตอร์ของวิธี MOPBIL มีผลกระทบต่อสมรรถนะในการหาค่าเหมาะที่สุดเพียงเล็กน้อย

Abstract

This paper proposes a multiobjective two-stage optimization and investigates on the performance of a meta-heuristic namely multi-objective population based incremental learning (MOPBIL) for solving two-stage optimization of a plate structure. A design process consists of two stages as (1) topology optimization and (2) shape and sizing optimization. In the topology optimization process, the ground element filtering (GEF) is used to suppress checkerboard patterns on a structural topology and to reduce a number of design variables. MOPBIL with various sets of optimization parameter settings is applied to tackle both design stages. Comparative results based on the hypervolume indicator reveal that changes in parameter setting slightly affect MOPBIL search performance. Structural topology and structural shape and sizing results obtained from using MOPBIL are illustrated and compared. It is illustrated that the use of MOPBIL to find optimal shape and sizing of plate structure is effective and practical.

คำสำคัญ: ขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการ วิธีเรียนรู้แบบเพิ่มพูนโดยอาศัยกลุ่มประชากร ขอบหน้า พาเรโต การหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด การหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด

Keywords: Evolutionary Algorithm, Multiobjective Population-Based Incremental Learning, Pareto Front, Topology optimization, Shape and Sizing Optimization

1. บทนำ

ในการออกแบบโครงสร้างหรือชิ้นส่วนทางกลนั้น จำเป็นต้องเป็นไปตามเป้าหมาย (objective) และต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขบังคับ (constraints) หรือสภาวะการใช้งานจริงของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนนั้นๆ ปัจจุบันได้มีการประยุกต์ใช้ขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการ (evolutionary algorithms) ซึ่งเป็นวิธีการหาค่าเหมาะที่สุด (optimization method) ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ กับการออกแบบทางด้านวิศวกรรม เพื่อค้นหาโครงสร้างหรือรูปร่างเหมาะที่สุดของชิ้นส่วนให้เป็นไปตามเป้าหมายและต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขบังคับต่างๆ ที่ผู้ออกแบบต้องการ ขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการนี้สามารถลดเวลาในการออกแบบได้มากเมื่อเปรียบเทียบกับการออกแบบดั้งเดิมที่ใช้วิธีการลองผิดลองถูก (trial and error) แรกเริ่มนั้นขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการใช้กับปัญหาที่มีเป้าหมายเดียว แต่ปัญหาทางด้านวิศวกรรมนั้น โดยส่วนใหญ่มีมากกว่าหนึ่งเป้าหมาย (multiobjective) ในการออกแบบ เพื่อให้ครอบคลุมกับปัญหาและข้อกำหนดต่างๆ ในการออกแบบ ดังนั้นขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการแบบหลายเป้าหมายในการออกแบบ (multiobjective evolutionary algorithms, MOEAs) (1-5) จึงมีบทบาทสำคัญสำหรับการแก้ปัญหานี้ อีกทั้งวิธีการนี้สามารถให้ผลเฉลยที่อยู่ในรูปเซตของผลเฉลยที่ไม่ถูกครอบงำ (non-dominated solutions) หรือ ผลเฉลย '*พาเรโต*' (Pareto solutions) หรือขอบหน้าพาเรโต (Pareto front) ด้วยการรันเพียงครั้งเดียวเท่านั้น เมื่อเทียบกับวิธีที่ใช้อนุพันธ์ซึ่งต้องการจำนวนครั้งในการหาค่าเหมาะที่สุดเท่ากับจำนวนผลเฉลยในขอบหน้าพาเรโต ด้วยคุณลักษณะเด่นที่กล่าวมานี้ ปัจจุบันจึงมีการนำ MOEAs มาประยุกต์ใช้กับการออกแบบทางด้านวิศวกรรมอย่างกว้างขวาง เช่น การออกแบบหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด (shape and sizing optimisation) ของโครงสร้างแขนรับแรงบิด (torque arm) (6) ซึ่งเป็นขั้นตอนการออกแบบขั้นต้น (preliminary design) เพื่อปรับปรุงและเพิ่มเติมคุณสมบัติทางกายภาพของโครงสร้าง (7-10) จากกรอบแนวคิดในการออกแบบที่ได้จากขั้นตอนการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด (topology optimisation) (11) และจากผลการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบสมรรถนะของขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการต่างๆ ใน (6,12) กับการออกแบบหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดของโครงสร้างคานยื่นแบบแผ่นโดยมีหลายเป้าหมายภายใต้เงื่อนไขบังคับต่างๆ ในการออกแบบ ได้แสดงให้เห็นว่า วิธี MOPBIL มีสมรรถนะในการค้นหาผลเฉลยของปัญหาการออกแบบหลากหลายรูปแบบ

ดังนั้น บทความนี้จึงได้นำเสนอการประยุกต์ใช้วิธีเรียนรู้แบบเพิ่มพูนโดยอาศัยกลุ่มประชากร (PBIL) (13) ที่ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อแก้ปัญหาหลายเป้าหมายออกแบบ (MOPBIL) (1, 14) สำหรับหาผลเฉลยของปัญหาการออกแบบ 2 ขั้นตอน ในกระบวนการออกแบบ 2 ขั้นตอนของโครงสร้างแบบแผ่นนี้ นำเสนอเพื่อให้ผู้ออกแบบสามารถดำเนินการออกแบบ เริ่มต้นจากที่ไม่ทราบรูปทรงของโครงสร้างเลย จนได้ชิ้นงานที่พร้อมใช้งานในขั้นตอนที่ 2 โดยขั้นตอนแรกคือ การหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดหรือขั้นตอนการออกแบบเชิงแนวคิด (15-19) และขั้นตอนที่สองคือ การหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุดซึ่งเป็นขั้นตอนการปรับปรุงโครงสร้างที่ได้จากขั้นตอนแรกเพื่อเพิ่มสมรรถนะการใช้งานของโครงสร้าง (20) นอกจากนี้ ยังได้ศึกษาถึงผลกระทบที่เกิดจากค่าพารามิเตอร์ของ MPBIL ที่มีต่อผลการออกแบบในขั้นตอนที่ 2

2. วิธีวิจัย

2.1 การหาค่าเหมาะที่สุดหลายเป้าหมายด้วยขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการ

ปัญหาการออกแบบที่มีหลายเป้าหมาย สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ ดังนี้

Objective functions

$$\min: \boldsymbol{f} = \{f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_p(\mathbf{x})\} \quad (1)$$

Subject to

$g_i(\mathbf{x}) \le 0$

$h_i(\mathbf{x}) = 0$

เมื่อ $\mathbf{x}$ คือ เวคเตอร์ของตัวแปรออกแบบ

f_i คือ ฟังก์ชันเป้าหมาย

g_i คือ เงื่อนไขบังคับแบบอสมการ

h_i คือ เงื่อนไขบังคับแบบสมการ

ผลลัพธ์ที่ได้จากสมการที่ 1 เรียกว่า ขอบหน้าพาเรโต หรือเซตของผลเฉลยที่ไม่ถูกครอบงำ ดังแสดงในรูปที่ 1

วิธี MOPBIL ในบทความนี้ ใช้หลักการวิวัฒน์บนพื้นฐานของพาเรโต (Pareto-based method) คือ ในแต่ละรอบการคำนวณ (generation) ขณะที่ชุดประชากรใหม่ถูกสร้างขึ้น เซตผลเฉลยที่ไม่ถูกครอบงำจะถูกจัดกลุ่มระหว่างจำนวนสมาชิกของประชากรนั้นๆ (หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า *"ผลเฉลยพาเรโตเฉพาะที่"* (local Pareto solutions)) หลังจากนั้นจะถูกนำไปดำเนินการในรอบการคำนวณครั้งต่อไปจนกระทั่งลู่เข้าหาคำตอบ

$$\mathrm{HV} = \bigcup_{i \in A} V_i \quad (2)$$

ในการศึกษานี้จะใช้ค่า hypervolume (HV) หรือค่าการครอบครองพื้นที่เป้าหมาย เป็นเกณฑ์ในการพิจารณาการลู่เข้าสู่คำตอบดังรูปที่ 2 (6) ซึ่งสามารถคำนวณได้ตามสมการที่ 2

โดยที่ HV คือ ค่า hypervolume

V_i คือ ปริมาตรของ hypercube ที่ถูกสร้างขึ้นด้วยผลเฉลยที่ไม่ถูกครอบงำแต่ละตัวกับ จุดอ้างอิง O' และเซต S ซึ่งเขียนแทนด้วย H(S, O')

การประยุกต์ใช้ วิธี MOPBIL กับการออกแบบหารูปร่างเหมาะที่สุดของโครงสร้างคานยื่นแบบแผ่นรับแรงที่ปลายคานในบทความนี้ มี 2 ขั้นตอน คือ

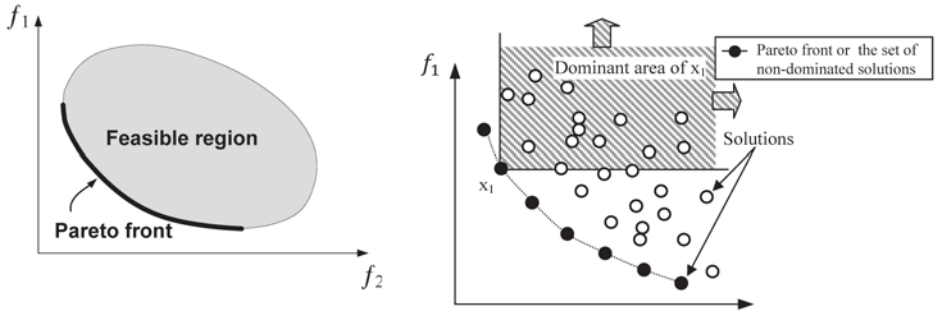
2.2 การหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด

2.2.1 ปัญหาออกแบบ

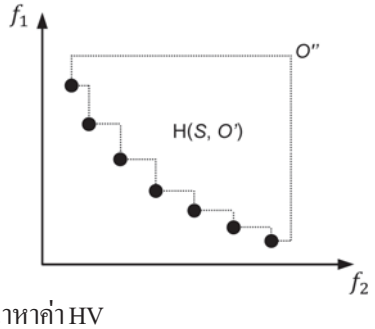
ปัญหาการออกแบบทอพอโลยีเหมาะที่สุด

Objective functions

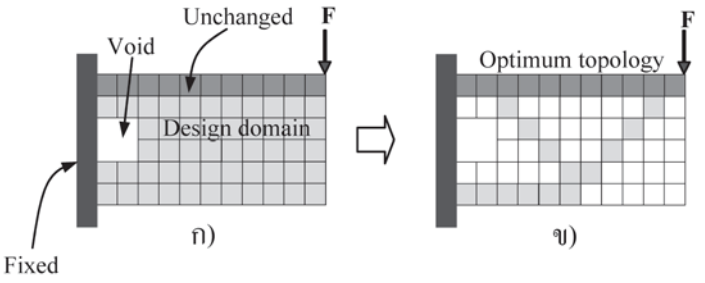
$$\min_x f_w\left(\rho^{GEF}\right) \;\&\; \min_x f_c\left(\rho^{GEF}\right) \quad (3)$$



รูปที่ 1 ตัวอย่างขอบหน้าพาเรโตหรือเซตของผลเฉลยที่ไม่ถูกครอบงำของปัญหาที่มีสองเป้าหมายออกแบบ



รูปที่ 2 รูปแบบของการพิจารณาหาค่า HV



รูปที่ 3 แสดงตัวอย่างรูปแบบการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดของโครงสร้าง
ก) การแบ่งเอลิเมนต์บนโดเมนการออกแบบ และบริเวณที่กำหนดให้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงระหว่างการดำเนินการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด
ข) โครงสร้างทอพอโลยีเหมาะที่สุด

subject to

$$0.4 - r \le 0$$

$$r - 0.6 \le 0$$

$$\sigma_{von} - \sigma_y \le 0$$

$$\boldsymbol{\rho}_i \in \{0.000001m, 0.01m\}$$

เมื่อ f_w คือ น้ำหนักของโครงสร้าง และ f_c คือ ค่าความหยุ่น (compliance) ของโครงสร้าง คำนวณได้ดังสมการที่ 4

$$f_c(\boldsymbol{\rho}^{GEF}) = \mathbf{d}^T\mathbf{K}\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \, \mathbf{d}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{d}_i \qquad (4)$$

เมื่อ d และ d_i คือ ระยะขจัดรวมของระบบ และระยะขจัดของเอลิเมนต์ ตามลำดับ

$\mathbf{K}$ และ k_i คือ สติฟเนสเมทริกซ์รวมของระบบ และสติฟเนสเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ ตามลำดับ

N คือ จำนวนเอลิเมนต์ของโครงสร้าง

$\boldsymbol{\rho}_i$ คือ ความหนาของเอลิเมนต์พื้นหรือไฟไนต์เอลิเมนต์

ส่วน $\boldsymbol{\rho}^{GEF}$ คือ เวคเตอร์ของตัวแปรออกแบบหรือความหนาแน่นเทียม (pseudo-densities) ของเอลิเมนต์ สามารถดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน (15) $r = m(\boldsymbol{\rho}^{GEF})/m(\boldsymbol{\rho}^{n})$ คือ อัตราส่วนของมวลของโครงสร้างจาก ผลเฉลย $\boldsymbol{\rho}^{GEF}$ ต่อมวลสูงสุดของโครงสร้าง $\boldsymbol{\rho}^{n}$ (มวลของโดเมนการออกแบบเริ่มต้นก่อนเข้าสู่ขบวนการออกแบบ) σ_{von} คือ von mises stress σ_y คือ yield stress โดยที่ฟังก์ชันเป้าหมายแรกใช้เพื่อลดน้ำหนักและราคาของวัสดุที่ใช้ในการสร้างชิ้นงาน ส่วนฟังก์ชันเป้าหมายที่สองใช้ในการเพิ่มความแข็งแรงหรืออีกนัยหนึ่งเป็นการเพิ่มความน่าเชื่อถือ (reliability) ของโครงสร้าง

2.2.2 ตัวแปรออกแบบ

ในการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด โดยทั่วไปแล้วจะกำหนดโดเมนการออกแบบ และหลังจากนั้นทำการแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์เล็กๆ ดังรูปที่ 3 ก) โดยที่ตัวแปรออกแบบคือความหนาของเอลิเมนต์เหล่านั้น เมื่อสิ้นสุดกระบวนการออกแบบและได้ผลเฉลยเหมาะที่สุด (optimum solution) จากสมการที่ 3) เอลิเมนต์ใดที่มีค่าตัวแปรออกแบบหรือความหนาสูง ($\boldsymbol{\rho}_i = 0.01m$) จะกลายเป็นเนื้อวัสดุ ส่วนเอลิเมนต์ที่มีค่าความหนาต่ำ ($\boldsymbol{\rho}_i = 0.000001m$) จะกลายเป็นรูบนโครงสร้าง ดังรูปที่ 3 ข) ตัวแปรออกแบบในขั้นตอนนี้ คือความหนาของเอลิเมนต์ และเนื่องจากจำนวนตัวแปรที่ใช้ออกแบบเพื่อหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดของโครงสร้างนั้นมีจำนวนมาก (เท่ากับจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้วิเคราะห์) ทำให้การประยุกต์ใช้ขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการกับปัญหาการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดไม่ประสบผลสำเร็จเท่าที่ควร ด้วยเหตุนี้จึงเพิ่มกระบวนการเชิงตัวเลขพิเศษเพื่อเพิ่มสมรรถนะในการหาคำตอบ คือ การกรองเอลิเมนต์พื้น (Ground Element Filtering, GEF) (1, 15) ซึ่งเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากในการลดจำนวนตัวแปรออกแบบ พร้อมกันนั้นยังสามารถป้องกันการเกิดตาหมากรุกบนทอพอโลยีของโครงสร้างได้ในขณะเดียวกัน ดังนั้นในขั้นตอนการหากรอบแนวคิดในการออกแบบหรือการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด ด้วยขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการแบบ

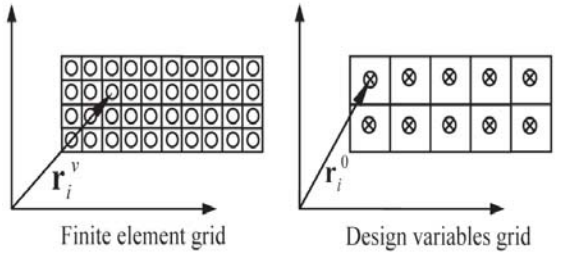
หลายเป้าหมายนี้ จึงประยุกต์ใช้ร่วมกับวิธี GEF และคำนวณได้ดังสมการที่ 5

$$\boldsymbol{\rho} = CA^{-1}\,\boldsymbol{\rho}^{GEF} = T\boldsymbol{\rho}^{GEF} \quad (5)$$

เมื่อ $\boldsymbol{\rho}$ คือ เวคเตอร์ของความหนาของเอลิเมนต์พื้นหรือไฟไนต์เอลิเมนต์ (กริดละเอียด) สำหรับวิเคราะห์โครงสร้าง

$\boldsymbol{\rho}^{GEF}$ คือ เวคเตอร์ของตัวแปรออกแบบ (กริดหยาบ) หรือความหนาแน่นเทียม ส่วนเมตริกซ์แปลงค่า **T** สามารถคำนวณได้จากสมการที่ 6 (15) (ดังรูปที่ 4)

$$T = CA^{-1} \quad (6)$$



รูปที่ 4 กริดหยาบและกริดละเอียดสำหรับ GEF

เมื่อ $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times m} = \left[f\left(d\left(\mathbf{r}_i^0, \mathbf{r}_j^0\right)\right)\right] = [f(d_{ij})]$

$$\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]_{n\times m} = \left[f\left(d\left(\mathbf{r}_k^v, \mathbf{r}_j^0\right)\right)\right] = [f(d_{kj})]$$

$$d_{ij} = d\left(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j\right) = \sqrt{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}$$

$f(d_{ij})$ คือ kernel function ของตัวแปร d_{ij} ในที่นี้คือ $f(d_{ij}) = d_{ij}$

เมื่อได้ผลเฉลยเบื้องต้นของการออกแบบจากขั้นตอนแรกแล้ว หลังจากนั้น ทอพอโลยีของโครงสร้างจะถูกนำเข้าสู่ขั้นตอนที่ 2 เพื่อปรับปรุงสมรรถนะของโครงสร้างที่ได้ คือ

เมื่อได้ผลเฉลยเบื้องต้นของการออกแบบจากขั้นตอนแรกแล้ว หลังจากนั้น ทอพอโลยีของโครงสร้างจะถูกนำเข้าสู่ขั้นตอนที่ 2 เพื่อปรับปรุงสมรรถนะของโครงสร้างที่ได้ คือ

2.3 การหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด

2.3.1 ปัญหาการออกแบบ

ปัญหาการออกแบบที่ใช้ในขั้นตอนนี้ยังคงเป็นปัญหาการออกแบบเช่นเดียวกับขั้นตอนการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด คือ

Objective functions

$$\min_x f_w(d) \;\&\; \min_x f_c(d) \quad (7)$$

subject to

$$\sigma_{von} - \sigma_y \le 0$$

$$f_c - 2f_{c,min} \le 0$$

เมื่อ $f_{c,min}$ คือ ค่าเริ่มต้นต่ำสุดของความหยุ่น ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างเริ่มต้นก่อนเข้ากระบวนการ และ d คือ เวคเตอร์ของตัวแปรออกแบบหรือพิกัดตำแหน่งที่ใช้สร้างเส้นโค้งแบบ cubic spline

2.3.2 ตัวแปรออกแบบ

การกำหนดตัวแปรออกแบบในขั้นตอนนี้เพื่อปรับปรุงหาขนาดและรูปร่างของโครงสร้างจากขั้นตอนการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด ดังนั้น พิกัดและตำแหน่งของตัวแปรออกแบบจึงอยู่ในกรอบโครงสร้างทอพอโลยีที่ได้ และเนื่องจากเลขไบนารี (เลข '0' และ '1') ซึ่งเป็นตัวดำเนินการวิวัฒนาการของวิธี MOPBIL แต่ค่าตัวแปรออกแบบที่ใช้เป็นเลขจำนวนจริง ดังนั้น จึงต้องแปลงเลขไบนารี เป็นเลขจำนวนจริงในช่วงออกแบบก่อน

ค่าคุณสมบัติทางกายภาพของโครงสร้างที่ใช้เป็นเป้าหมายออกแบบและเงื่อนไขในการออกแบบทั้ง 2 ขั้นตอนนี้ ได้จากโปรแกรมวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์

2.4 วิธีเรียนรู้แบบเพิ่มพูนโดยอาศัยกลุ่มประชากรแบบหลายเป้าหมาย (MOPBIL)

วิธี MOPBIL เป็นวิธีที่ใช้ประชากรเลขไบนารีในการหาผลเฉลยเหมาะที่สุด และใช้เวคเตอร์ของความน่าจะเป็นมากกว่าหนึ่งเวคเตอร์ ซึ่งเรียกว่า เมตริกซ์ของความน่าจะเป็น (probability matrix) เขียนแทนด้วย **P** ในขั้นตอนเริ่มต้นเอลิเมนต์ทุกเอลิเมนต์ของเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นจะถูกตั้งค่าเป็น 0.5 ซึ่งหมายความว่ามีการกระจายตัวเลข "0" และ "1" ในแนวคอลัมน์ของประชากร (ที่มีผลเฉลยอยู่ในแนวแถว) ให้มีจำนวนเท่ากัน โดยกำหนดให้ N คือ จำนวนผลเฉลยในประชากร l คือ จำนวนเวคเตอร์ของความน่าจะเป็นที่ต้องการใช้ และ n_b คือความยาวของตัวเลขฐานสองสำหรับผลเฉลยใดๆ ดังนั้นเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นจะมีขนาดเป็น $l \times n_b$ โดยที่แต่ละแถวของเมตริกซ์คือเวคเตอร์ของความน่าจะเป็นย่อยที่ใช้ในการผลิตประชากรย่อยเป็นจำนวน N/l ผลเฉลย การผลิตประชากรในแต่ละ

รอบของการคำนวณ (iteration) จะได้จากการรวมกลุ่มประชากรย่อย l กลุ่มเข้าด้วยกัน จากนั้นทำการหาค่าของฟังก์ชันเป้าหมายของผลเฉลยในกลุ่มประชากรที่สร้างขึ้นมา ขั้นตอนต่อมาคือ การคัดสรรผลเฉลยที่ไม่ถูกครอบงำ (non-dominated sorting) จากการรวมกลุ่มของประชากรชุดใหม่ที่ได้ กับผลเฉลยที่ไม่ถูกครอบงำในรอบการคำนวณที่ผ่านมา หลังจากนั้นทำการปรับปรุงเมตริกซ์ของความน่าจะเป็น โดยใช้ผลเฉลยที่ไม่ถูกครอบงำในการแปลงค่าเอลิเมนต์ของเมตริกซ์ สำหรับแถวที่ i^{th} ของเมตริกซ์ เราสามารถคำนวณค่าใหม่ของเอลิเมนต์ของ **P** ได้ตามสมการที่ 8 (1, 6)

$$P_{ij}^{new} = P_{ij}^{old}\left(1-L_R\right)+\bar{b}_j L_R \qquad (8)$$

เมื่อ $L_R \in [0,1]$ เรียกว่าค่าอัตราการเรียนรู้ (learning rate) $\bar{b}_j$ คือ เอลิเมนต์ที่ j^{th} ของผลเฉลยที่เป็นเลขฐานสอง และเราสามารถปรับปรุงค่าเมตริกซ์ของความน่าจะเป็นด้วยกระบวนการมิวเทชัน (mutation) ดังนี้

$$P_{ij}^{new} = P_{ij}^{old}\left(1-m_s\right)+rand\bullet(0 or 1)\bullet m_s \qquad (9)$$

เมื่อ m_s คือ ค่าการเลื่อนของการเปลี่ยนแปลง โอกาสในการประยุกต์ใช้สมการนี้ถูกกำหนดโดยความน่าจะเป็นของการเกิดการเมิวเทชัน เช่นเดียวกับในกรณีของขั้นตอนวิธีเชิงพันธุกรรม (genetic algorithms) ขั้นตอนการดำเนินการของวิธี MOPBIL ดูรายละเอียดได้ใน (1, 6)

บทความนี้จะใช้ค่า hypervolume (3-4, 8) ในการพิจารณาเกณฑ์การลู่เข้าของขอบหน้าพาเรโตหรือค่าการครอบครองพื้นที่ในการออกแบบ ในวิธี MOPBIL สำหรับหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดนี้ จะใช้กลุ่มตัวแปรออกแบบที่เป็นเลขไบนารีสตริง (binary string: 0 หรือ 1) โดยกำหนดให้เมตริกซ์ความเป็นไปได้ของการเกิดกลุ่มประชากร **P** ขนาด 10 x 140 จำนวนประชากร = 50 อัตราการเกิดมิวเทชัน = 0.05 และ m_s = 0.2 และในส่วนขั้นตอนการหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด กลุ่มตัวแปรออกแบบจะใช้เลขจำนวนจริง ที่ได้จากการแปลงเลขไบนารีสตริงซึ่งเป็นตัวแปรดำเนินการในขั้นตอนวิวัฒนาการเป็นเลขจำนวนจริงที่ใช้ออกแบบ

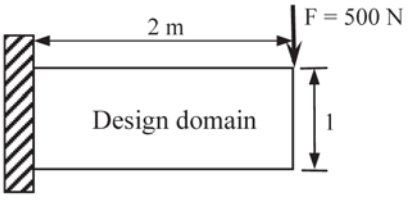
พร้อมกันนั้น เพื่อศึกษาผลกระทบของการตั้งค่าพารามิเตอร์ของวิธี MOPBIL จึงได้กำหนดค่าอัตราการเกิดมิวเทชัน ที่ 0.05, 0.10 และ 0.90 เป็นกรณีทดสอบ และทุกกรณีทดสอบ กำหนดให้ค่า m_s = 0.2 และแบบตัวแปรดำเนินการเป็นเลขฐานสอง โดยที่ทั้ง 3 กรณีทดสอบ กำหนดให้จำนวนประชากร = 50 เมตริกซ์ความเป็นไปได้ของการเกิดกลุ่มประชากร **P** ขนาด 10 x140 และทั้ง 2 ขั้นตอนกำหนดให้ขนาดของเมตริกซ์เก็บผลเฉลยของพาเรโต คือ 150 ในขั้นตอนการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดนั้น วิธี MOPBIL จะดำเนินการหาผลเฉลย 1 ครั้ง เพื่อค้นหาผลเฉลยพาเรโตของการออกแบบทอพอโลยี โดยมีจำนวนรอบในการคำนวณ 200 รอบ และในขั้นตอน การหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด จะดำเนินการหาผลเฉลย 5 ครั้ง ของแต่ละกรณีทดสอบ (เพื่อทดสอบความคงเส้นคงวา (consistency) ของวิธี MOPBIL กับการออกแบบในขั้นตอนนี้) และจำนวนรอบในการคำนวณคือ 200 รอบ

2.5 แบบจำลองโครงสร้างที่ใช้ในการทดสอบ

แบบจำลองโครงสร้างที่ใช้ในการทดสอบเป็นโครงสร้างคานยื่นแบบแผ่นรับแรงที่ปลายคาน ดังรูปที่ 5 โดยมีคุณสมบัติของวัสดุดังนี้ young modulus, E = 210 GPa, Poisson's ratio, ν = 0.3, yield stress, σ = 250 MPa ส่วนแรงภายนอกคือ F = 500 N และความหนา $\in \{0.00\ \text{m}, 0.01\ \text{m}\}$ การกำหนดความหนาต่ำสุดเท่ากับ 0.00 เพราะมีความต่อเนื่องของโครงสร้างจากขั้นตอนการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดแล้ว สำหรับการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เลือกใช้เอลิเมนต์ ชนิด 4 เหลี่ยม 4 โนด กับทั้ง 2 ขั้นตอนออกแบบ และกระบวนการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดนั้นจะแบ่งเอลิเมนต์ของโครงสร้างด้วย วิธีการกรองเอลิเมนต์พื้น โดยมีกริดละเอียดสำหรับวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ 32 x 16 เอลิเมนต์ ซึ่งได้จากกริดหยาบหรือความหนาแน่นเทียม สำหรับตัวแปรออกแบบที่มีความละเอียดเท่ากับ 16 x 8 เอลิเมนต์ ซึ่งสามารถลดตัวแปรออกแบบได้ถึง 57 % ส่วนการแบ่งเอลิเมนต์ของโครงสร้างในขั้นตอนการหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุดนั้น เพื่อความสะดวกจะใช้การแบ่งแบบ free mesh เนื่องจากรูปแบบโครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงทุกรอบการคำนวณ ตามค่าของตัวแปรออกแบบหรือพิกัดที่ใช้สร้างรูปร่างของโครงสร้าง ซึ่งต่างจากขั้นตอนการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด ที่มีจำนวนเอลิเมนต์ พิกัดตำแหน่งโนดของแต่ละเอลิเมนต์คงที่ตลอดการคำนวณ แต่มีเฉพาะการเปลี่ยนแปลงความหนาของแต่

ละเอลิเมนต์ที่ใช้เป็นตัวแปรออกแบบเท่านั้น

การแบ่งแบบ Free mesh นี้มีขนาดเอลิเมนต์ (element size) ที่เล็กกว่าขนาดเอลิเมนต์ของกริด 32 x 16 ที่ใช้สำหรับ topology optimization ซึ่งหมายความว่า free mesh ให้ความแม่นยำในการทำนายผลมากกว่า อย่างไรก็ตามในขั้นตอนของ topology optimization ซึ่งจัดว่าเป็น concept design หรือเป็นขั้นตอนแรกๆ ของการออกแบบ การคำนวณไฟไนต์เอลิเมนต์อาจไม่ต้องมีความแม่นยำสูงมากก็ได้ จึงสามารถใช้กริดขนาด 32 x 16 ได้ ส่วนการออกแบบ shape and sizing optimization เป็นขั้นตอนท้ายๆ จึงต้องใช้ความ



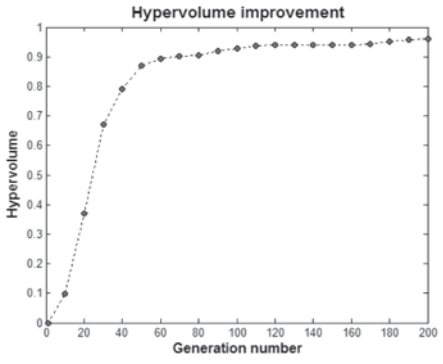
รูปที่ 5 แบบจำลองโครงสร้างที่ใช้ทดสอบ

ละเอียดของเอลิเมนต์สูง

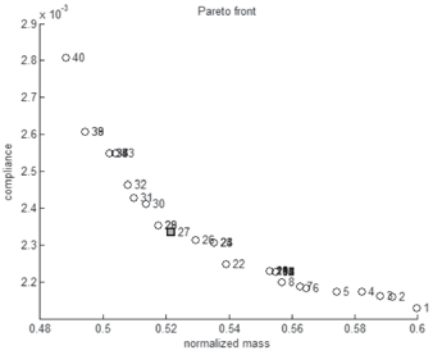
3. ผลการทดสอบและการอภิปราย

3.1 การหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด

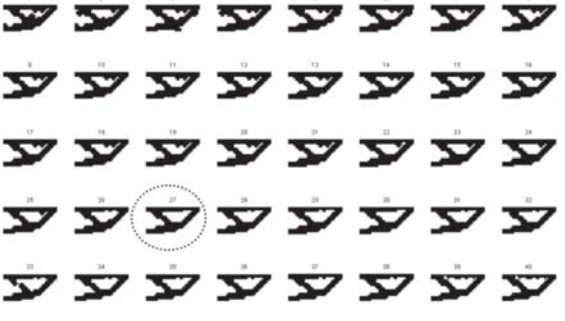
แบบจำลองโครงสร้างเหมาะที่สุดในขั้นตอนของการออกแบบตามแนวคิด หรือการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด และขอบหน้าพาเรโตที่ได้นั้น จะพิจารณาจากค่า hypervolume (HV) ที่ได้ โดยที่ค่า hypervolume ที่สูงกว่าหมายถึงการลู่เข้าหาผลเฉลยที่ดีกว่า จากรูปที่ 6 จะเห็นได้ว่าค่า hypervolume เริ่มมีค่าเกือบคงที่ตั้งแต่รอบที่ 120 และในรอบสุดท้ายค่า hypervolume = 0.9608 โดยได้จากการกำหนดจุดอ้างอิง O' (6) ตามตำแหน่งผลเฉลยที่ให้ค่า f_w และ f_c สูงสุดจากการยูเนียนเซตผลเฉลยในขอบหน้าพาเรโตทุกรอบการคำนวณ ซึ่งค่าสูงสุดที่ได้คือ $f_w = 0.7598$ และ $f_c = 0.0079$ N • m ส่วนกรอบขอบเขตล่างคือ ค่าต่ำสุดที่ $f_w = 0.4629$ และ $f_c = 0.0021$ N • m จุดอ้างอิงนี้จะใช้เป็นจุดชี้วัดระดับการปรับปรุงค่า hypervolume ของแต่ละรอบการคำนวณ ดังนั้นการกำหนดรอบในการคำนวณที่ 200 รอบ มีค่ามากเพียงพอสำหรับการหาผลเฉลยของขอบหน้าพาเรโตในรอบที่ลู่เข้าดังรูปที่ 6 และผลลัพธ์ของขอบหน้าพาราโตที่ได้ในรอบการคำนวณที่ 200 รอบ ดังรูปที่ 7 พร้อมทั้งทอพอโลยีเหมาะที่สุดของโครงสร้าง ดังรูปที่ 8



รูปที่ 6 hypervolume improvement



รูปที่ 7 ขอบหน้าพาเรโตของโครงสร้างทอพอโลยีเหมาะที่สุด



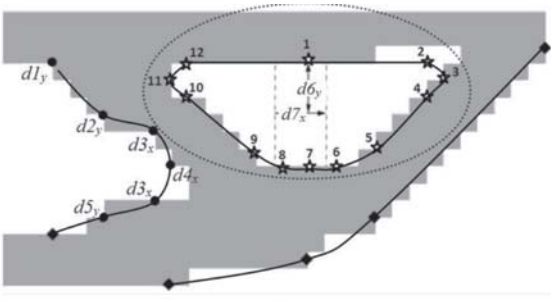
รูปที่ 8 โครงสร้างทอพอโลยีเหมาะที่สุดจากขอบหน้าพาเรโตในรูปที่ 7

3.2 การหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด

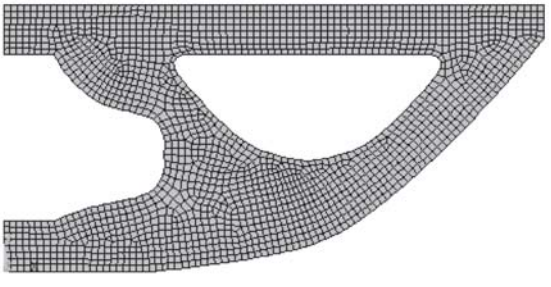
จากรูปที่ 8 จะเห็นได้ว่า เราได้ผลเฉลยทอพอโลยีเหมาะที่สุดของปัญหาการออกแบบ (สมการที่ 3) หลากหลายรูปแบบจากการรัน MOPBIL เพียงหนึ่งครั้ง เมื่อได้ผลการออกแบบของขั้นตอนแรกแล้ว เลือกผลเฉลยเหมาะที่สุดจากรูปที่ 8 มาหนึ่งค่า จากนั้น นำผลเฉลยที่เลือกไว้เข้าสู่ขั้นตอนที่สองซึ่งเป็นการหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด ในขั้นตอนนี้เลือกผลเฉลยดังรูปที่ 9 เป็นกรณีทดสอบออกแบบ ในการเลือกผลเฉลยในขอบหน้าพาเรโตสำหรับออกแบบนั้นขึ้นอยู่กับประเด็นสนใจของผู้ออกแบบ เพราะคำตอบไม่ได้มีคำตอบเดียว เช่น กรณีเลือกโครงสร้างที่มีน้ำหนักเบาสุด (ต้นทุนในการผลิตต่ำ) ก็ต้องแลกมาด้วยโครงสร้างที่มีความหยุ่นตัวสูง ดังนั้นผู้ออกแบบต้องแลกเปลี่ยนหรือประนีประนอม (trade - off) ของเป้าหมายในการออกแบบให้เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่ผู้ออกแบบต้องการมากที่สุด

รูปที่ 9 โครงสร้างทอพอโลยีเหมาะที่สุดที่ถูกเลือก (ตามรูปที่ 8) เข้าสู่ขั้นตอนการหาขนาดและรูปร่าง เหมาะที่สุดโดยมีค่า $f_w = 0.52148$ และ $f_c = 0.0023354$ N • m

จากรูปที่ 10 สัญลักษณ์ คือ พิกัดเริ่มต้นของตัวแปรตัวแปรออกแบบ ถ คือตำแหน่งที่เปลี่ยนแปลงตามสัดส่วนที่ถูกกำหนดโดยตัวแปร $d6_y$ และ $d7_x$ และ ◆ คือ ตำแหน่งที่ไม่เปลี่ยนแปลงและใช้เป็นพิกัดสร้างรูปร่างบริเวณดังรูปที่ 10 ก) ส่วนเส้นรูปร่างของโครงสร้างระหว่างตัวแปรออกแบบได้จากการประมาณค่าในช่วง (interpolation) ด้วยเส้นโค้งแบบ cubic spline ของแต่ละตัวแปรออกแบบซึ่งให้ลักษณะเส้นรูปร่างที่ต่อเนื่องกันในช่วงระหว่างจุด 2 จุด ทำให้เส้นโค้งในการสร้างรูปร่างของชิ้นงานที่ได้จากการประมาณค่าในช่วงตัวแปรออกแบบดียิ่งขึ้น ส่วนตัวห้อย x และ y หมายถึงการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรออกแบบหรือตำแหน่งของจุดตามแนวแกน x และ แกน y ตามลำดับ และขนาดช่องว่างช่วงปลายคานบริเวณเส้นประในรูปที่ 10 ก) จะแปรผันเป็นสัดส่วนที่ถูกกำหนดด้วยตัวแปร และ โดยมีขอบเขตของตัวแปรออกแบบ (boundary constraints): ตามตารางที่ 1 ซึ่งใช้เป็นตัวจำกัดขอบเขตบริเวณที่ต้องเจาะเอาเนื้อวัสดุบนโครงสร้างออกและค่าขอบเขตนี้ต้องอยู่ภายใต้รูปแบบโครงร่างของโครงสร้างทอพอโลยีเหมาะที่สุดที่ได้ ตัวห้อย x และ y คือ ตัวแปรออกแบบที่เปลี่ยนแปลงได้เฉพาะตามแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ โดยขอบเขตที่กำหนดนี้อยู่ในกรอบพิกัดโครงสร้างทอพอโลยีเพื่อปรับในรายละเอียดของขนาดและรูปร่างของโครงสร้างดังรูปที่ 10



ก)



ข)

รูปที่ 10 ก) ตัวแปรที่ใช้ออกแบบพร้อมตำแหน่งพิกัดออกแบบ สำหรับสร้างเส้นโค้งแบบ cubic spline เพื่อหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด และ ข) รูปแบบการ mesh ของโครงสร้าง

ผลลัพธ์ที่ได้จากการหาค่าต่ำสุดของน้ำหนักและค่าความหยุ่นของโครงสร้างในการหาคำตอบจำนวน 5 ครั้ง ค่า hypervolume หรือ ค่าการครอบครองเป้าหมายในการออกแบบ จะถูกนำไปเปรียบเทียบ กับค่า hypervolume ที่ได้จากขั้นตอนการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุด ดังตารางที่ 2 โดยช่องแรก คือ ค่า hypervolume ของขอบหน้าพาเรโตจาก

ตารางที่ 1 ขอบเขตของตัวแปรออกแบบ: d (หน่วยเมตร)

b	0.8125	0.6875	0.5625	0.6875	0.3125	0.0625	1.1875
d	$d1_y$	$d2_y$	$d3_x$	$d4_x$	$d5_y$	$d6_y$	$d7_x$
a	0.7500	0.5625	0.5000	0.5625	0.1875	0.2188	1.0000

ตารางที่ 2 ค่า hypervolume จากขั้นตอนการหาทอพอโลยีและการหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด

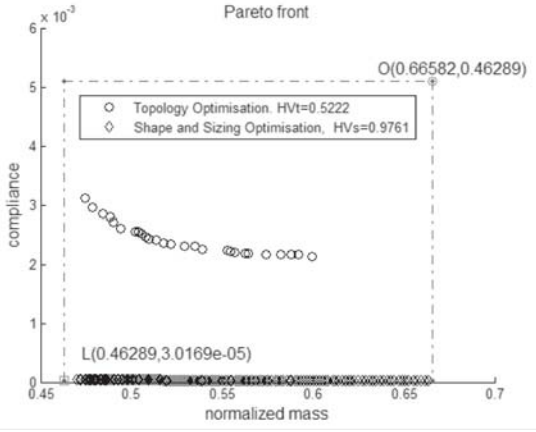
Topology optimization	Shape and sizing optimization			
hypervolume	hypervolume			
	No.	mutation		
		0.05	0.10	0.90
0.5222	1	0.9647	0.9790	0.9682
	2	0.9551	0.9710	0.9814
	3	0.9671	0.9589	0.9771
	4	0.9644	0.9652	0.9635
	5	0.9662	0.9866	0.9761
Mean		0.9635	0.9721	0.9733
Std		0.0048	0.0110	0.0072

ขั้นตอนการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดในรอบการคำนวณที่ 200 และ จากขั้นตอนการหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุดในรอบการคำนวณที่ 200 ของทั้ง 5 ครั้งในการหาคำตอบ โดยจุดอ้างอิง O' ได้จากการคัดเลือกผลเฉลยทั้งหมดในขอบหน้าพาเรโตตามตำแหน่งผลเฉลยที่ให้ค่า f_w และ f_c สูงสุดจากผลการยูเนียนเซตผลเฉลยในขอบหน้าพาเรโตของรอบสุดท้ายหรือรอบที่ 200 ของขอบหน้าพาเรโตจากทั้งขั้นตอนการหาทอพอโลยีและขั้นตอนการหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด โดยได้ค่าสูงสุดที่ $f_w = 0.66581$ และ $f_c = 0.00509$ N • m และกรอบขอบเขตล่างคือ $f_w = 0.46289$ และ $f_c = 0.00003$ N • m

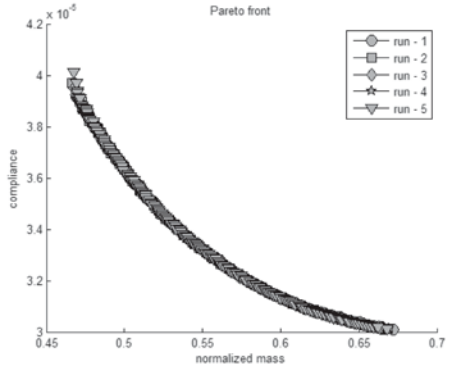
ตารางที่ 3 การจัดอันดับจากข้อมูลในตารางที่ 2 โดยขั้นตอนการทดสอบ t-test

		MOPBIL		
mutation		0.05	0.10	0.90
MOPBIL	0.5	0	0	1
	0.10	0	0	0
	0.90	0	0	0
Sum		0	0	1
Ranking		2	2	1

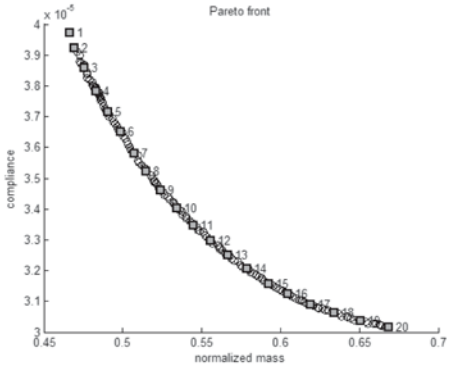
จะเห็นได้ว่าค่า hypervolume ที่ได้จากการปรับปรุงโครงสร้างด้วยขั้นตอนการหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุดนั้นได้เพิ่มสมรรถนะในการรับภาระหรือพื้นที่ในการครอบครองเป้าหมายของทั้ง 3 กรณีทดสอบและเมื่อพิจารณาผลลัพธ์จากการตั้งค่าพารามิเตอร์ของอัตราการเกิดมิวเทชัน โดยกำหนดจำนวนครั้งในการหาคำตอบ 5 ครั้ง (ตารางที่ 2) ใน วิธี MOPBIL(0.9) หรือที่ค่าอัตราการเกิดมิวเทชัน = 0.9 ให้ค่า hypervolume เฉลี่ยสูงที่สุดคือ 0.9733 รองลงมาคือ MOPBIL(0.10) และ สุดท้าย คือ MOPBIL (0.05) จากข้อมูลตามตารางที่ 2 นำมาจัดอันดับ ด้วยขั้นตอนการทดสอบ t-test ผลที่ได้แสดงดังตารางที่ 3 เพื่อตรวจสอบว่า ผลของแต่ละคู่ของแต่ละรูปแบบทดสอบแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่ เนื่องจากมี MOPBIL อยู่ 3 รูปแบบ จึงมีการเปรียบเทียบกัน 3 x 3 ชุด จากผลการเปรียบเทียบในตาราง ถ้าวิธีที่ I ดีกว่าวิธีที่ J อย่างมีนัยสำคัญ แถวที่ J และ คอลัมน์ที่ I จะมีค่าเป็น 1 หากไม่เป็นไปตามเงื่อนไขนี้จะมีค่าเป็น 0 จากตารางจะเห็นได้ว่า MOPBIL(0.90) ดีกว่า MOPBIL(0.05) อย่างมีนัยสำคัญ เมื่อทำการจัดอันดับ จะได้ MOPBIL(0.90) อยู่ในอันดับที่ 1 ส่วน MOPBIL(0.5) และ MOPBIL(0.10) ถือว่าไม่แตกต่างกัน



รูปที่ 11. ตัวอย่างการหาค่า hypervolume จากตารางที่ 2 ระหว่างขอบหน้าพาเรโตที่ได้จากการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดและการหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุดของ MOPBIL จากค่า mutation = 0.90 ของการรันครั้งที่ 5



รูปที่ 12. ผลเฉลยขอบหน้าพาเรโต จาก 5 ครั้ง ในการหาคำตอบของกรณีทดสอบ MOPBIL ที่ค่า mutation = 0.90



รูปที่ 13. ขอบหน้าพาเรโตจากการหาคำตอบครั้งที่ 2 ของกรณีทดสอบ MOPBIL ที่ค่า mutation = 0.90

อย่างไรก็ตามค่าเฉลี่ยที่ได้จากทั้ง 5 ครั้ง ในการหาคำตอบของแต่ละรูปแบบทดสอบมีค่าที่ใกล้เคียงกัน และเมื่อพิจารณาคุณลักษณะของขั้นตอนวิธีวิวัฒนาการ และจากผลลัพธ์ที่ได้ของแต่ละครั้งในการหาคำตอบจะมีค่าไม่เท่ากันแต่มีค่าที่ใกล้เคียงกัน (6) ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่าการปรับค่าพารามิเตอร์ของอัตราการเกิดมิวเทชันมีผลกระทบต่อสมรรถนะในการหาค่าเหมาะที่สุดเพียงเล็กน้อยเท่านั้น โดยค่าอัตรามิวเทชันที่สูงกว่ามีแนวโน้มจะให้ผลดีกว่าเล็กน้อย และเมื่อพิจารณาความสม่ำเสมอในการลู่เข้าหาคำตอบ จากรูปที่ 11 ของกรณีทดสอบ MOPBIL (0.90) จะเห็นได้ว่าขอบหน้าพาเรโตเกือบจะเป็นแนวเดียวกัน (ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานอยู่ที่ 0.0072) ซึ่งชี้ให้เห็นถึงสมรรถนะและความคงเส้นคงวา (consistency) ในการค้นหาคำตอบที่สูงของวิธี MOPBIL

4. สรุป

จากการประยุกต์ใช้วิธีเรียนรู้แบบเพิ่มพูนโดยอาศัยกลุ่มประชากรแบบหลายเป้าหมาย หรือ วิธี MOPBIL กับแผนการออกแบบ 2 ขั้นตอนในการออกแบบโครงสร้างคานยื่นแบบแผ่นรับแรงที่ปลายคาน ซึ่งประกอบด้วย ขั้นตอนการหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดและขั้นตอนการหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด เพื่อปรับปรุงสมรรถนะในการรับภาระของโครงสร้าง เมื่อพิจารณาจากการเปรียบเทียบค่า hypervolume ของขอบหน้าพาเรโตในรอบสุดท้าย แสดงให้เห็นถึงสมรรถนะในการรับภาระของโครงสร้างเพิ่มขึ้นมาก และจากการตั้งค่าพารามิเตอร์ของอัตราการเกิดมิวเทชันของทั้ง 3 กรณีทดสอบในขั้นตอนการหาขนาดและรูปร่างเหมาะที่สุด มีผลกระทบต่อสมรรถนะในการหาค่าเหมาะที่สุดเพียงเล็กน้อยเท่านั้น จากค่าตัวบ่งชี้ hypervolume เราสามารถกล่าวได้ว่ากระบวนการออกแบบสองระดับที่นำเสนอ ให้ผลเฉลยการออกแบบที่ดีกว่าการประยุกต์การหาทอพอโลยีเหมาะที่สุดเพียงขั้นตอนเดียว

5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม ผู้สนับสนุนทุนวิจัยภายใต้โครงการทุนอุดหนุนการวิจัยอาจารย์รุ่นใหม่ และภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

6. เอกสารอ้างอิง

(1) Sujin Bureerat. Lecture Notes on Mechanical System Optimisation. Khon Kean University. Thailand. 2002.

(2) Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach. IEEE Tran. on Evolutionary Computation**.** 1999; 3(4): 257-271.

(3) Sujin Bureerat, Sungkom Srisomporn. Optimum plate-fin heat sinks by using a multi-objective evolutionary algorithm. Engineering Optimization. 2010; 42: 305-343.

(4) Sungkom Srisomporn, Sujin Bureerat. Geometrical Design of Plate-Fin Heat Sinks Using Hybridization of MOEA ans RSM. IEEE Transaction on Components and Packaging Technologies. 2008; 31(2): 351-359.

(5) Tawatchai Kunakote, Supachai Sombudha and Sujin Bureerat. Comparative Performance of MOEAs on Topological Design of Plate Structures. 23th ME-NETT Conf., *Chiang Mai*, Thailand. 2009.

(6) Tawatchai Kunakote. Multiobjective Structural Topology Optimisation Using Evolutionary Algorithms. The Degree of Doctor of Philosophy, Mechanical Engineering, Khon Kean University. 2011.

(7) Norapat Noilublao, Sujin Bureerat. Simultaneous topology, shape and sizing optimisation of a three-dimensional slender truss tower using multiobjective evolutionary algorithms. Computers and Structures. 2011; 89: 2531–2538.

(8) Thein, C.K., Liu, J.-S. Effective structural sizing/shape optimization through optimisation reliability-related multifactor approach. Multidiscipline Modeling in Materials and Structures. 2012; 8(2): 159-177.

(9) Leandro Fleck Fadel Miguel, Rafael Holdorf Lopez, Leticia Fleck Fadel Miguel. Multimodal size, shape, and topology optimisation of truss structures using the Firefly algorithm. Advances in Engineering Software. 2013; 56: 23–37

(10) Noilublao, C., Bureerat, S. Topology and sizing optimization of trusses with adaptive ground finite elements using multiobjective PBIL. Advanced Materials Research. 2011; 308-310: 1116-1121.

(11) N.P. Garcia-Lopez, M. Sanchez-Silva, A.L. Medaglia, A. Chateauneuf. An improved robust topology optimization approach using multiobjective evolutionary algorithms. Computers and Structures. 2013; 125: 1-10

(12) Tawatchai Kunakote, Sujin Bureerat. Multi-objective topology optimization using evolutionary algorithms. Engineering Optimization. 2011; 43(5): 541-557.

(13) Sujin Bureerat, Tawatchai Kunakote. Topological design of structures using population-based optimization methods. Inverse Problems in Science and Engineering. 2006; 14(6): 589-607.

(14) Sujin Bureerat, Krit Sriworamas. Population-Based Incremental Learning for Multiobjective Optimisation. A. Saad et al. (Eds.): Soft Computing in Industrial Applications, ASC 39; 2007: 223-232.

(15) Sujin Bureerat, Jumlong Limtragool. Performance enhancement of evolutionary search for structural topology optimization. Finite Elements in Analysis and Design. 2006; 42: 547-566.

(16) Grener, D., Hajela. Truss topology optimization for mass and reliability considerations-co-evolutionary

multiobjective formulations. Structural and multidisciplinary optimization. 2013; 45(1): 589-613.

(17) Ansols, R., Vegueria, E., Canales, J., Alonso, C. Evolutionary optimization of compliant mechanisms subjected to non-uniform. Finite elements in analysis and design. 2012; 57: 1-14.

(18) Zou, Z.H., Xie, Y. M., Huang, X. An improved bi-directional evolutionary topology optimization method for frequencies. International journal of structural stability topology optimization method for frequencies. 2010; 10(1): 55-75.

(19) Zou, Z., Xie, Y. M., Huang, X. Combining genetic algorithms with BESO for topology optimization. Structural and multidisciplinary optimization. 2009; 38(5): 19-20.

(20) Tawatchai Kunakote and Sujin Bureerat. Surrogate-Assisted Multiobjective Evolutionary Algorithms for Structural Shape and Sizing Optimisation. Mathematical Problems in Engineering. Volume 2013, Article ID 695172, 13 pages.