

การปรับปรุงเสถียรภาพของระบบทางกลไม่เชิงเส้น 2 DOF ที่มีเฟสไม่ต่ำที่สุด

To Improve the Stability of Nonminimum-phase Characteristics for Nonlinear Mechanical Systems with 2 DOF

อิทธิเดช มุลมั่งมี (Ittidej Moonmangmee)^{1*}
สโรช ไตรเมฆ (Saroj Saimek)²

บทคัดย่อ

บทความนี้เสนองานวิจัยพื้นฐานเชิงวิเคราะห์ทางด้านโครงสร้างระบบทางกลและปรับปรุงเสถียรภาพของพลวัตศูนย์ (zero dynamics) สำหรับระบบทางกลอย่างง่ายที่มีสององศาอิสระ พลวัตศูนย์ของระบบทางกลเกิดจากระบบมีจำนวนตัวควบคุม (actuator) น้อยกว่าองศาอิสระ (degrees of freedom) โดยทั่วไปการควบคุมระบบที่พลวัตศูนย์ไม่เสถียรหรือระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด (nonminimum-phase system) เป็นปัญหาที่มีความยุ่งยากซับซ้อน ในบทความนี้ได้เสนอแนวทางใหม่ในการปรับปรุงเสถียรภาพของพลวัตศูนย์ให้มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable) โดยใช้โครงสร้างของตัวระบบทางกลเองเป็นตัวควบคุม กล่าวคือ ออกแบบให้มีแรง/โมเมนต์ด้านการเคลื่อนที่ (counter force/moment) ในส่วนโครงสร้างของพลวัตภายใน (internal dynamics) โดยมี 2 ขั้นตอน คือ ขั้นแรกกำหนดจุดสมดุลของพลวัตศูนย์จากค่าต่ำสุดวงกว้างของฟังก์ชันพลังงานศักย์ และขั้นตอนที่สองสถานะของพลวัตศูนย์เข้าสู่จุดสมดุลดังกล่าวด้วยการเพิ่มแรงหน่วงเข้าในระบบเป็นผลให้พลวัตศูนย์มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ ซึ่งสอดคล้องกับระบบลูกตุ้มผกผัน (inverted pendulum) เป็นผลให้ระบบเฟสไม่ต่ำที่สุดเปลี่ยนเป็นระบบเฟสต่ำที่สุด (minimum-phase system) นอกจากนี้ยังได้เสนอเงื่อนไขในการตรวจสอบความไม่เสถียรของพลวัตศูนย์ซึ่งพิจารณาเฉพาะในส่วนพลังงานจลน์ของระบบเท่านั้น

Abstract

This paper describes our preliminary research in analyzing a mechanical structure and improves stability of zero dynamics for a simple mechanical system with 2 degrees of freedom. Zero dynamics occur in mechanical systems that have fewer actuators than the number of degrees of freedom. In general, control of unstable zero dynamics or nonminimum-phase systems are complicated problems. In this paper, we introduce a new method for improving the stability of zero dynamics and control by using mechanical structures. That is the internal dynamics part is controlled by the action of counter force/moment proceeding along two basic stages. First, there is an energy shaping stage where we modify the potential energy of the system in such a

¹ นักศึกษาปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

² ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

*corresponding author, e-mail: profittidej@gmail.com

way that the new potential energy function has a global and unique minimum in the desired equilibrium. Second, there is a damping injection stage where we now modify the dissipation function to ensure asymptotic stability. We demonstrated this method for the inverted pendulum on a cart. Consequently the nonminimum-phase system became a minimum-phase system. In addition, we have proposed conditions to prove that in these systems with exclusively kinetic energy, the zero dynamics are unstable except for some rare situations.

คำสำคัญ: ทฤษฎีการควบคุม, ระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด, พลวัตศูนย์

Keywords: control theory, nonminimum-phase system, zero dynamics

คำอธิบายสัญลักษณ์

$\mathcal{R}, \mathcal{R}^+$	เซตของจำนวนจริง, เซตของจำนวนจริงบวกรวมศูนย์
$\mathcal{R}^n$	เซตของเวกเตอร์ค่าจริง n มิติ
$\mathcal{R}^{n \times m}$	เซตของเมตริกซ์ค่าจริงมิติ n แถว m สดมภ์
m_{ij}	สมาชิกแถวที่ i สดมภ์ที่ j ของเมตริกซ์ $M \in \mathcal{R}^{n \times m}$
$A^T(q^T)$	การสลับเปลี่ยน (transpose) ของเมตริกซ์ A (เวกเตอร์ q)
t	ตัวแปรเวลา, $t \in \mathcal{R}^+$
$\dot{x}$	อนุพันธ์ของ x นั่นคือ $\frac{d}{dt}x$
$\ x\ $	นอร์ม (norm) ของเวกเตอร์ $x \in \mathcal{R}^n$
B_r	บอลเปิด (open ball) $\{x \in \mathcal{R}^n \mid \ x\ < r\}$
$\partial\Omega$	ขอบเขต (boundary) ของเซต Ω
$f: S_1 \rightarrow S_2$	ฟังก์ชัน f ส่ง (mapping) จากเซต S_1 ไปยังเซต S_2
$\alpha(\cdot)$	ฟังก์ชันคลาส K (class K function)
$\mathcal{V}(\cdot)$	ฟังก์ชันเลียปูนอฟ (Lyapunov function)
$q, \dot{q}$ และ $\ddot{q}$	โคออร์ดิเนตทั่วไป (generalized coordinate) ความเร็วทั่วไป (generalized velocity) และความเร่งทั่วไป (generalized acceleration) ตามลำดับ
$T(q, \dot{q})$	ฟังก์ชันพลังงานจลน์ (kinetic energy function)
$V(q)$	ฟังก์ชันพลังงานศักย์ (potential energy function)
$L(q, \dot{q})$	ฟังก์ชันของลากรอนจ์ (Lagrangian): $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$
□	จบบทตั้ง (lemma), ประพจน์ (proposition) และทฤษฎีบท (theorem)
■	จบการพิสูจน์ (proof)

บทนำ

เสถียรภาพของระบบควบคุมเป็นสิ่งจำเป็นที่จะต้องศึกษา เนื่องจากระบบที่ไม่เสถียรสามารถสร้างปัญหาในการควบคุมได้มากและอาจทำให้โครงสร้างภายในระบบได้รับความเสียหายอีกด้วย ดังนั้นโดยทั่วไปการควบคุมจึงมีหน้าที่ในการทำให้ภาวะความไม่เสถียรนั้นลดน้อยลง ระบบที่มีความไม่เสถียรในตัวเองสูงย่อมควบคุมได้ยากกว่าระบบที่มีเสถียรภาพดี การควบคุมระบบทางกล (control of mechanical system) เป็นศาสตร์หนึ่งที่มีการศึกษามาตั้งแต่อดีต โดยอาศัยความรู้ทางกลศาสตร์เชิงวิเคราะห์ (analytical mechanics) และทฤษฎีระบบควบคุม (control system theory) เราอาจจำแนกประเภทของระบบทางกลด้วยการพิจารณาจำนวนตัวควบคุม (actuator) m กับองศาอิสระ (degree of freedom; DOF) n ของการเคลื่อนที่ ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ประเภทคือ 1.) ระบบ Fully-actuated เมื่อ $m = n$ 2.) ระบบ Underactuated เมื่อ $m < n$ และ 3.) ระบบ Overactuated เมื่อ $m > n$ ซึ่งไม่กล่าวในที่นี้ อย่างไรก็ตามระบบทางกลที่เป็น Fully-actuated อาจกลายเป็นระบบ Underactuated ได้ถ้าตัวควบคุมตัวใดตัวหนึ่งเกิดความเสียหายจนไม่สามารถทำงานได้ (Mnif, 2005)

การควบคุมระบบทางกลไม่เชิงเส้น (control of nonlinear mechanical system) ที่เป็น Fully-actuated เราสามารถใช้การป้อนกลับของ กฎควบคุมไม่เชิงเส้น (nonlinear control law) เพื่อกำจัดเทอมไม่เชิงเส้นออกจากระบบทำให้ทุกสถานะ (states) ของระบบเป็นสมการเชิงเส้น เรียกการควบคุมนี้ว่า Full State Feedback Linearization (Isidori, 1995) ในกรณีของการควบคุมระบบ Underactuated บ่อยครั้งที่สถานะของระบบที่ต้องการควบคุมไม่ได้ถูกควบคุมโดยตรง (noncollocation problem) เนื่องจากสมการของการเคลื่อนที่ (equation of motion) ได้แบ่งระบบออกเป็นสองส่วนคือ โคออร์ดิเนตส่วนที่ถูกควบคุม (actuated coordinate) และโคออร์ดิเนตส่วนที่ไม่ถูกควบคุม (unactuated coordinate) ทำให้การควบคุมนั้นเป็น การควบคุมผ่านตัวแปรสถานะอื่นไปยังส่วนที่ไม่ได้ถูกควบคุม

โดยตรง (Olfati-Saber, 2001) ดังนั้นในการป้อนกลับของกฎควบคุมไม่เชิงเส้น เพื่อกำจัดเทอมไม่เชิงเส้นออกจากระบบ สามารถทำได้เพียงส่วนเดียวเท่านั้น ซึ่งเรียกส่วนนั้นว่า พลวัตภายนอก (external dynamics) ยังเหลือสถานะในส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นและไม่ได้ถูกควบคุมโดยตรง เรียกว่า พลวัตภายใน (internal dynamics) ดังนั้นระบบ Underactuated จึงเกิดพลวัตภายในขึ้นเสมอและการทำให้ระบบเป็นเชิงเส้นสามารถทำได้เพียง Partial Feedback Linearization (Spong และ Block, 1995) นั่นคือ เราไม่สามารถควบคุมด้วย (Full State) Feedback Linearization การวิเคราะห์และการควบคุมระบบทางกลที่เป็น Underactuated จึงมีความซับซ้อนและหลากหลาย (Spong, 1996) ทำให้มีปัญหามากๆ เกิดขึ้นซึ่งเห็นได้จากมีงานวิจัยในหัวข้อดังกล่าวเป็นจำนวนมาก

สมบัติเฟสไม่ต่ำที่สุด (nonminimum phase) ที่พิจารณาในบทความนี้ เป็นสมบัติเชิงสัญญาณเข้า-สัญญาณออก (input-output property) ในกรณีระบบเชิงเส้น (linear system) เราสามารถพิจารณาสมบัติดังกล่าวได้จากค่าซีโร (zero) ของฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function) กล่าวคือ ถ้าระบบเชิงเส้นมีค่าซีโรทุกตัวอยู่ทางด้านซ้ายของระนาบเชิงซ้อน (open left half plane) จะกล่าวว่าเป็นระบบเฟสต่ำที่สุด (minimum phase) ในทางกลับกัน ถ้ามีค่าซีโรอย่างน้อยหนึ่งตัวอยู่ทางด้านขวาของระนาบเชิงซ้อน (open right half plane) จะกล่าวว่าเป็นระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด ซึ่งมีข้อจำกัดด้านสมรรถนะของระบบและมีปัญหาในการควบคุม (Middleton, 1997) อย่างไรก็ตามสมบัติเฟสไม่ต่ำที่สุดในระบบไม่เชิงเส้น (nonlinear system) เกิดจากการไม่มีเสถียรภาพของพลวัตภายใน (internal dynamics) หรือพลวัตศูนย์ (zero dynamics) ซึ่งการออกแบบด้วยวิธี Backstepping, Sliding Mode หรือ Partial Feedback Linearization ไม่สามารถนำมาควบคุมได้โดยตรง (Murray and Hauser, 1990; Kokotovic et al., 1992; Ding, 2001; Ding, 2003)

เนื้อหาในบทความ หัวข้อ 2 กล่าวถึงทฤษฎีที่จำเป็นสำหรับการวิเคราะห์ระบบไม่เชิงเส้นความหมายของพลวัตศูนย์และระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด หัวข้อ 3 แบบ

จำลองของระบบทางกลที่มี 2 DOF หัวข้อ 4 กล่าวถึงเสถียรภาพของระบบพลวัตศูนย์ โดยให้เงื่อนไขเพียงพอในการตรวจสอบความไม่เสถียรของพลวัตศูนย์ที่พิจารณาเฉพาะส่วนที่มาจากพลังงานจลน์ของระบบเท่านั้น หัวข้อ 5 เป็นการวิเคราะห์พลวัตศูนย์ของระบบทางกลที่มี 2 DOF และเงื่อนไขที่ทำให้เป็นระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด หัวข้อ 6 กล่าวถึงการปรับปรุงเสถียรภาพของระบบเฟสไม่ต่ำที่สุดโดยใช้โครงสร้างทางกล ซึ่งอธิบายแนวคิดผ่านตัวอย่างของระบบลูกตุ้มผกผัน (inverted pendulum) ที่มีตัวหน่วงและมีมวลถ่วงสมดุลอยู่ด้านตรงข้ามของแกน และหัวข้อ 7 สรุปผลและวิจารณ์

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงแนวคิดของเสถียรภาพในแบบต่างๆ และทฤษฎีที่ใช้ตรวจสอบความไม่เสถียรของจุดสมดุล (equilibrium point) สมบัติเฟสไม่ต่ำที่สุดมีความสัมพันธ์กับเสถียรภาพของพลวัตภายใน กล่าวคือ สถานะภายใน (internal state) เป็นสถานะที่ไม่สามารถสังเกตได้ (unobservable) จากสัญญาณออก (output) ซึ่งระบบที่พลวัตภายในมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับจะเป็นระบบที่มีพฤติกรรมดี กล่าวคือมีสมบัติเฟสต่ำที่สุด

1 เสถียรภาพของเลียปูนอฟ (Lyapunov Stability)

พิจารณาระบบไม่เชิงเส้น ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (autonomous system) ในรูปของปัญหาค่าเริ่มต้น (initial value problem):

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

โดยที่ $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ เป็นลิปชิตซ์เฉพาะที่ (locally Lipschitz) และไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไป เราสมมติให้ $f(0) = 0$ กล่าวคือจุดสมดุลของระบบ อยู่ที่จุดกำเนิด

บทนิยาม 1 (Vidyasagar, 1993) เราจะกล่าวว่าจุดสมดุลของระบบ (1)

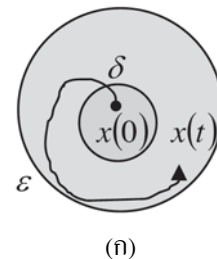
1. มีเสถียรภาพ (stable) เมื่อกำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ทำให้

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

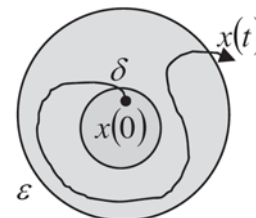
2. ไม่เสถียร (unstable) ถ้าจุดสมดุลดังกล่าวไม่มีเสถียรภาพ (not stable) กล่าวคือ เมื่อ

กำหนดให้ $\varepsilon < 0$ เราไม่สามารถหา $\delta = \delta(\varepsilon) < 0$ ซึ่งทำให้

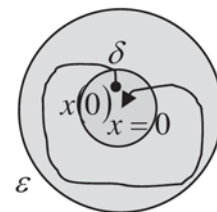
3. มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable) ถ้าจุดสมดุล $x < 0$ มีเสถียรภาพ และมี δ ทำให้ $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 1. สมบัติเสถียรภาพของจุดสมดุล $x < 0$ ในลักษณะต่างๆ

(ก) มีเสถียรภาพ (stable) (ข) ไม่เสถียร (unstable)

(ค) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเงื่อนไขเพียงพอในการตรวจสอบความไม่เสถียรของจุดสมดุลของระบบ (1)

ทฤษฎีบท 2 (Chetaev's theorem) (Vidyasagar, 1993) ให้ $\mathcal{V}: D \subset \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}$ เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องอย่างน้อย 1 ครั้ง (C^1 -function) เราจะกล่าวว่าระบบ (1) มีจุดสมดุลที่ไม่เสถียร (unstable) ถ้ามีเซตเปิด (open set) Ω , บอลเปิด (open ball) B_r โดยที่ $\Omega \subseteq B_r$ เป็นฟังก์ชันคลาส K สอดคล้องกับ

1. $0 < \mathcal{V}(x) < \infty, \forall x \in \Omega$
2. $0 \in \partial\Omega$ ($\partial\Omega$ เป็นขอบเขต (boundary) ของ Ω)
3. $\dot{\mathcal{V}}(x) \geq \alpha(\|x\|), \forall x \in \Omega$
4. $\mathcal{V}(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega \cap B_r$

กล่าวคือ ถ้าระบบมีสถานะเริ่มต้นภายใน Ω ซึ่งใกล้จุดกำเนิดมากพอ เมื่อเวลาเป็นอนันต์สถานะของระบบจะออกจาก Ω และเข้าไปยัง B_r ซึ่งเป็นส่วนภายนอก (exterior) ของ Ω

2 ระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด (Nonminimum Phase Systems)

ระบบทางกล 2 DOF ที่กำลังศึกษาเป็นระบบ Underactuated ดังนั้นจึงมีอยู่หนึ่งโคออร์ดิเนตที่เป็นระบบพลวัตภายในเสมอ บทนิยามต่อไปนี้จะให้ความหมายของพลวัตศูนย์และระบบเฟสต่ำที่สุด

บทนิยาม 3 (Zero Dynamics) (Isidori, 1995) พิจารณาระบบไม่เชิงเส้นที่มีหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก (SISO):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2)$$

โดยที่ $x \in \mathcal{H}^n$ และ $u, y \in \mathcal{H}$ ถ้ากำหนดให้ $Z^*(x)$ เป็นแมนนิโฟลด์ใหญ่ที่สุด (maximal manifold) ซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

1. $h(x) = 0, \forall x \in Z^*$
2. มี $u^*(x)$ เพียงค่าเดียว (unique) ซึ่งทำให้ $f(x) + g(x)u^*(x)$ สัมผัสกับเซต $Z^*, \forall x \in Z^*$ แล้วพลวัตศูนย์ (zero dynamics) ของระบบกำหนดโดย

$$\dot{x} = f^*(x) = f(x) + g(x)u^*(x), \forall x \in Z^* \quad (3)$$

บทนิยาม 4 (Minimum-phase Systems) (Isidori, 1995) เราจะกล่าวว่าระบบไม่เชิงเส้น (2) เป็นระบบเฟสต่ำที่สุด (minimum-phase system; NMP) ที่จุดสมดุล x_c ถ้าพลวัตศูนย์ $x = f^*(x)$ มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ มิฉะนั้นเราจะกล่าวว่า ระบบไม่เชิงเส้น (2) เป็นระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด (nonminimum-phase system)

ระบบทางกลไม่เชิงเส้นที่มี 2 องศาอิสระ

พิจารณาระบบทางกลที่สามารถเขียนแบบจำลองให้อยู่ในรูปสมการของการเคลื่อนที่ออยเลอร์-ลากรองจ์ (EL equation of motion) หรือสมการ EL ซึ่งมีฟังก์ชันของลากรองจ์ (Lagrangian):

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad (4)$$

โดยที่ $q(t), \dot{q}(t) \in \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^n$ แทนโคออร์ดิเนตทั่วไป (generalized coordinate) และความเร็วทั่วไป (generalized velocity) ของระบบ n -DOF ตามลำดับ พลังงานศักย์ $V(q): \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตำแหน่งของระบบเท่านั้น และพลังงานจลน์สามารถเขียนได้ในรูปแบบกำลังสอง (quadratic function) กำหนดโดย

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (5)$$

โดยที่ $M(q) \in \mathcal{H}^{n \times n}$ เป็นเมตริกซ์ความเฉื่อย (inertia matrix) สอดคล้องกับเงื่อนไข $m_{ij} = m_{ji} > 0$

สมการ EL เป็นผลมาจากเงื่อนไขจำเป็น (necessary condition) สำหรับค่าสุดขีด (ค่าต่ำสุด) ของกิริยา (action) $I = \int L dt$ รูปแบบของสมการมีลักษณะไม่แปรเปลี่ยน (invariant) ไปตามโคออร์ดิเนตที่ใช้ในการระบุวัตถุหรืออนุภาคในระบบ (Spong et al., 2006) สมการ EL เขียนอยู่ในรูป

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = F \quad (6)$$

โดยที่ L นิยามตามสมการ (4) และ $F(t): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^n$ แทนแรงภายนอกทั่วไป (generalized external force) นอกจากนั้น สมการ EL ยังสามารถเขียนได้ในรูปแบบที่สมมูลกันคือ

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = F \quad (7)$$

โดยที่ $g(q) \equiv \frac{\partial V(q)}{\partial q} \in \mathcal{R}^n$ เป็นฟังก์ชันของแรงโน้มถ่วง (gravitational force) และ $C(q, \dot{q})\dot{q}$ เรียกว่า เมตริกซ์ของแรงโคริโอลิสและแรงสู่ศูนย์กลาง (Coriolis and centrifugal force matrix) ซึ่งมี

$$C(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk} \dot{q}_k \quad (8)$$

เทอม Γ_{ijk} เรียกว่า Christoffel's symbol สอดคล้องกับเมตริกซ์ความเฉื่อยในรูปของ

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \right) \quad (9)$$

ในที่นี้เราพิจารณากรณีเฉพาะของระบบทางกลไม่เชิงเส้นที่มี 2 DOF โดยอาศัยสมการ (7) ถึง (9) จะได้

$$\begin{cases} m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) = F_1 \\ m_{21}(q)\ddot{q}_1 + m_{22}(q)\ddot{q}_2 + h_2(q, \dot{q}) = F_2 \end{cases} \quad (10)$$

โดยที่

$$\begin{cases} h_1(q, \dot{q}) = \frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q_1} \dot{q}_1^2 + \frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_2} \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_1} \dot{q}_2^2 + g_1(q) \\ h_2(q, \dot{q}) = \frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{22}(q)}{\partial q_2} \dot{q}_2^2 + \frac{\partial m_{12}(q)}{\partial q_1} \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}(q)}{\partial q_2} \dot{q}_1^2 + g_2(q) \end{cases} \quad (11)$$

เสถียรภาพของระบบพลวัตศูนย์

เนื่องจากเสถียรภาพของระบบทางกล สามารถพิจารณาได้จากค่าสุดขีด (extremal) ของฟังก์ชันพลังงานศักย์ กล่าวคือ ถ้าพลังงานศักย์ของระบบมีค่าต่ำสุดเฉพาะที่/วงกว้าง (local/global minimum) ที่จุดสมดุลแล้ว ระบบทางกลก็จะมีเสถียรภาพเฉพาะที่/วงกว้างด้วย ในทางกลับกัน ถ้าจุดสมดุลนั้นเป็นจุดที่ทำให้พลังงานศักย์มีค่าสูงสุด (local maximum) แล้วระบบจะไม่มีเสถียร (Arnold, 1989) ดังนั้น บทตั้งที่กล่าวถึงต่อไปนี้จะให้เงื่อนไขเพียงพอ (sufficient condition) ในการบ่งบอกความไม่เสถียรของพลวัตศูนย์สำหรับระบบทางกล 2 DOF ซึ่งไม่นำผลของแรงโน้มถ่วงมาพิจารณา นั่นคือ สมมติให้พลวัตศูนย์มาจากเทอมพลังงานจลน์ของระบบเท่านั้น

บทตั้ง 5 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สเกลาร์ในรูป

$$\ddot{\eta} = k(\eta)\dot{\eta}^2 \quad (12)$$

โดยที่ $k(\eta)$ เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้ (integrable function) มีค่าอยู่ในขอบเขต (bounded) และเป็นบวกกึ่งแน่นอน (positive semidefinite) บนโดเมนของย่านใกล้เคียงรอบจุดสมดุล $[\eta, \dot{\eta}]^T = 0$ แล้วจุดสมดุลของระบบ (12) เป็นจุดสมดุลที่ไม่เสถียร (unstable)

การพิสูจน์ พิจารณาออกเป็น 2 กรณีคือ กรณีที่ $k(\eta) = 0$ บนโดเมนรอบจุดกำเนิด $\eta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ จะได้ว่าสมการ (12) อยู่ในรูป $\ddot{\eta} = 0$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าระบบมีจุดสมดุลที่ไม่เสถียร ในกรณีที่ $k(\eta) > 0$ กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $k(\eta)$ เป็นฟังก์ชันบวกแน่นอน (positive definite) และมีค่าอยู่ในขอบเขต กำหนดในโดเมนของเซตเปิด (โดยไม่สูญเสียสำคัญของกรณีทั่วไป) $\eta \in (0, \varepsilon)$ และให้ $\varepsilon_1 > 0$ ทำให้มีช่วงย่อย $\varepsilon_1 \leq \eta < \varepsilon$ ซึ่ง $k(\eta)$ เป็นฟังก์ชันบวกแน่นอนและมีขอบเขต

กำหนดฟังก์ชันเลียปูนอฟ (Lyapunov function candidate)

$$\mathcal{V}(\eta, \dot{\eta}) = \int_{\varepsilon_1}^{\eta} k(\xi) d\xi > 0$$

นิยามเซตเปิด $\Omega = \{(\eta, \dot{\eta}) : \eta > \varepsilon_1, \dot{\eta} > 0, \|[\eta, \dot{\eta}]^T\| < \varepsilon\}$ ซึ่งขอบเขต (boundary)

$$\partial\Omega_1 = \{(\eta, \dot{\eta}) : \dot{\eta} = 0\} \text{ และ } \partial\Omega_2 = \{(\eta, \dot{\eta}) : \eta = \varepsilon_1\}$$

ทำให้

$$\mathcal{V}(\eta, \dot{\eta}) = 0 \text{ และ } \mathcal{V}(\eta, \dot{\eta}) > 0, \forall [\eta, \dot{\eta}]^T \in \Omega$$

พิจารณาอนุพันธ์เทียบกับเวลาของฟังก์ชันเลียปูนอฟจะได้

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(\eta, \dot{\eta}) &= k(\eta)\dot{\eta}^3 + 2\dot{\eta}\dot{\eta} \int_{\varepsilon_1}^{\eta} k(\xi) d\xi \\ &= k(\eta) \left(1 + 2 \int_{\varepsilon_1}^{\eta} k(\xi) d\xi \right) \dot{\eta}^3 \end{aligned}$$

เห็นได้ชัดว่า $\dot{\mathcal{V}}(\eta, \dot{\eta}) > 0, \forall [\eta, \dot{\eta}]^T \in \Omega$ ดังนั้น จาก Chetaev's theorem จึงสรุปได้ว่าจุดสมดุลของระบบ (12) ไม่เสถียร ■

พลวัตศูนย์ของระบบทางกลที่มี 2 องศาอิสระ

เนื่องจากพลวัตศูนย์ของระบบทางกลเกิดจากการที่ระบบมีจำนวนตัวควบคุม (actuator) น้อยกว่าองศาอิสระ (DOF) เรียกว่าระบบ Underactuated ดังนั้นระบบทางกล 2 DOF ที่เป็น Underactuated จึงมีจำนวนตัวควบคุมเพียงตัวเดียว พลวัตของระบบในส่วนที่มีตัวควบคุม เรียกว่า พลวัตภายนอก (external dynamics) และพลวัตอีกส่วนซึ่งไม่ได้ถูกควบคุมจากตัวควบคุมโดยตรง จึงเรียกว่า พลวัตภายใน (internal dynamics) ในการหาพลวัตศูนย์ของระบบจะพิจารณาจากพลวัตภายใน โดยกำหนดให้พลวัตภายในนั้นเป็นอิสระจากการบังคับของตัวแปรที่มาจากพลวัตภายนอก (นั่นคือ กำหนดให้หาค่าเป็นศูนย์) ดังนั้น ในการวิเคราะห์เราจึงพิจารณาได้เป็นสองกรณีคือ 1.) ให้ F เป็นแรงที่มาจากตัวควบคุม เรียกว่า แรงภายนอกที่ควบคุมได้ (action of controllable input) ในขณะที่

F_2 เป็นแรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force) อื่นๆ ที่กระทำต่อระบบโดยไม่ได้มาจากตัวควบคุม เช่น hydrodynamic/aerodynamic force หรือ dissipative force เป็นต้น เรียกว่า แรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ (action of uncontrollable input) และ 2.) สมมติในทางกลับกัน กล่าวคือ ให้ F_2 เป็นแรงภายนอกที่ควบคุมได้, F_1 เป็นแรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ ซึ่งทั้งสองกรณีนี้เราให้โคออร์ดิเนตทั่วไป q_1 และ q_2 เป็นสัญญาณออกของระบบ โดยสรุปแล้วการวิเคราะห์สมการพลวัตศูนย์ของระบบจึงพิจารณาออกเป็น 4 กรณี โดยเริ่มจากสมการ (10) เรามี

$$\ddot{q}_1 = \Delta^{-1}(q)\{(F_1 - h_1(q, \dot{q}))m_{22}(q) - (F_2 - h_2(q, \dot{q}))m_{12}(q)\} \quad (13)$$

และ

$$\ddot{q}_2 = \Delta^{-1}(q)\{(F_2 - h_2(q, \dot{q}))m_{11}(q) - (F_1 - h_1(q, \dot{q}))m_{12}(q)\} \quad (14)$$

โดยที่ $m_{12}(q) = m_{21}(q)$, $\Delta(q) = m_{11}(q)m_{22}(q) - (m_{12}(q))^2 \neq 0$ และ h_i นิยามตามสมการ (11)

กรณีที่ 1: ($F_1 \neq 0, y = q_1$) พิจารณา F_1 เป็นแรงภายนอกที่ควบคุมได้, q_1 เป็นสัญญาณออก

$$\begin{aligned} \text{ให้ } q_1(t) \equiv 0 &\Rightarrow \dot{q}_1(t) \equiv 0 \Rightarrow \ddot{q}_1(t) \equiv 0 \\ &\Rightarrow F_1 = F_1(q_2) = h_1(q_2, \dot{q}_2) + \frac{m_{12}(q_2)}{m_{22}(q_2)}(F_2 - h_2(q_2, \dot{q}_2)) \end{aligned}$$

แทนค่าใน (14) เมื่อ $m_{22}(q_2) \neq 0, \forall q_2 \in \mathcal{R}$ จะได้สมการพลวัตศูนย์ ดังนี้

$$\ddot{q}_2 = -\frac{1}{2}m_{22}^{-1}(q_2)\left(\frac{\partial m_{22}(q_2)}{\partial q_2}\right)\dot{q}_2^2 - m_{22}^{-1}(q_2)g_2(q_2) + m_{22}^{-1}(q_2)F_2 \quad \text{โดยที่ } q_1 = \dot{q}_1 \equiv 0 \quad (15)$$

กรณีที่ 2: ($F_1 \neq 0, y = q_2$) พิจารณา F_1 เป็นแรงภายนอกที่ควบคุมได้, q_2 เป็นสัญญาณออก

$$\begin{aligned} \text{ให้ } q_2(t) \equiv 0 &\Rightarrow \dot{q}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \ddot{q}_2(t) \equiv 0 \\ &\Rightarrow F_1 = F_1(q_1) = h_1(q_1, \dot{q}_1) + \frac{m_{12}(q_1)}{m_{11}(q_1)}(F_2 - h_2(q_1, \dot{q}_1)) \end{aligned}$$

แทนค่าใน (13) เมื่อ $m_{12}(q_1) \neq 0, \forall q_1 \in \mathcal{R}$ จะได้สมการพลวัตศูนย์ ดังนี้

$$\ddot{q}_1 = -m_{12}^{-1}(q_1)\left(\frac{\partial m_{12}(q_1)}{\partial q_1}\right)\dot{q}_1^2 - m_{12}^{-1}(q_1)g_2(q_1) + m_{12}^{-1}(q_1)F_2 \quad \text{โดยที่ } q_2 = \dot{q}_2 \equiv 0 \quad (16)$$

อีกสองกรณีก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน จึงแสดงเฉพาะผลลัพธ์ดังนี้

กรณีที่ 3: ($F_2 \neq 0, y = q_1$) พิจารณา F_2 เป็นแรงภายนอกที่ควบคุมได้, q_1 เป็นสัญญาณออก

เมื่อ $m_{12}(q_2) \neq 0, \forall q_2 \in \mathcal{R}$ จะได้สมการพลวัตศูนย์ ดังนี้

$$\ddot{q}_2 = -m_{12}^{-1}(q_2)\left(\frac{\partial m_{12}(q_2)}{\partial q_2}\right)\dot{q}_2^2 - m_{12}^{-1}(q_2)g_1(q_2) + m_{12}^{-1}(q_2)F_1 \quad \text{โดยที่ } q_1 = \dot{q}_1 \equiv 0 \quad (17)$$

กรณีที่ 4: ($F_2 \neq 0, y = q_2$) พิจารณา F_2 เป็นแรงภายนอกที่ควบคุมได้, q_2 เป็นสัญญาณออก เมื่อ $m_{11}(q_1) \neq 0, \forall q_1 \in \mathcal{R}$ จะได้สมการพลวัตศูนย์ ดังนี้

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{2}m_{11}^{-1}(q_1)\left(\frac{\partial m_{11}(q_1)}{\partial q_1}\right)\dot{q}_1^2 - m_{11}^{-1}(q_1)g_1(q_1) + m_{11}^{-1}(q_1)F_1 \quad \text{โดยที่ } q_2 = \dot{q}_2 \equiv 0 \quad (18)$$

หมายเหตุ

1. สมการพลวัตศูนย์ (15) ถึง (18) มีโครงสร้างเป็นสมการ EL เช่นเดียวกับสมการ EL ของระบบทางกล 2 DOF (สมการ (10) และ (11)) เมื่อพิจารณาให้โคออร์ดิเนตทั่วไปตัวใดตัวหนึ่งเป็นศูนย์
2. กรณีที่สมการพลวัตศูนย์หาค่าไม่ได้หรือไม่นิยามที่จุด q^* เราจะกล่าวว่าระบบทางกลมีจุด q^* เป็นจุดเอกฐาน (singularity point) ซึ่งที่ตำแหน่งนั้นระบบไม่สามารถควบคุมได้ (uncontrollable)
3. “แรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้” ที่กล่าวถึงในที่นี้คือ แรงหรือโมเมนต์ที่กระทำกับระบบในส่วนพลวัตภายใน เช่น จากสมการ (18) ก็คือ F_1 ซึ่งสามารถเกิดขึ้นได้จากการเปลี่ยนแปลงหรือการเคลื่อนที่ของสมการ (18) เอง เนื่องจากแรงดังกล่าวไม่ได้มาจากตัวควบคุมภายนอก เช่น มอเตอร์ ดังนั้น แรงนี้จึงมีพฤติกรรมเสมือนเป็น Passive actuator กล่าวคือ “แรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้” สามารถเกิดขึ้นเมื่อมีการเคลื่อนที่ของพลวัตส่วนอื่นในระบบ เช่น แรงจากน้ำที่กระทำด้านข้างของลำตัวปลาพุ่งมาขณะว่ายน้ำในที่ลำตัวปลา (พลวัตภายใน) ทำหน้าที่เสมือน Passive actuator ขณะที่ส่วนหาง (พลวัตภายนอก) คือส่วนของตัวควบคุมจะเห็นว่าหากปราศจากลำตัวปลา ก็ไม่สามารถว่ายน้ำได้ ดังนั้น Passive actuator จึงมีความสำคัญต่อการปรับปรุงเสถียรภาพของระบบพลวัตศูนย์ ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

ทฤษฎีบท 6 ถ้าพลวัตศูนย์ของระบบทางกล 2 DOF ที่มีจำนวนตัวควบคุมน้อยกว่าองศาอิสระ (underactuated system) ตามสมการ (10) สอดคล้องกับบทตั้ง 5 แล้วจะกล่าวว่าเป็นระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด (NMP) เทียบกับสัญญาณออกที่เป็นโคออร์ดิเนตทั่วไปของระบบ $\square$

การพิสูจน์ พิจารณาพลวัตศูนย์ของระบบทางกล 2 DOF ซึ่งรูปแบบทั่วไปกำหนดโดยสมการ (12) เนื่องจากจุดสมดุลของระบบพลวัตศูนย์คือ $[q_i, \dot{q}_i]^T = 0, i=1,2$ ถ้าสมการพลวัตศูนย์สอดคล้องกับบทตั้ง 5 กล่าวคือจุดสมดุลของระบบเป็นจุดสมดุลที่ไม่เสถียร แล้วจากบทนิยาม 4 สรุปได้ว่าระบบทางกลไม่เชิงเส้น 2 DOF ตามสมการ (10) เป็นระบบเฟสไม่ต่ำที่สุดเทียบกับสัญญาณออก q_i ■

การปรับปรุงเสถียรภาพของระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด

ในหัวข้อ 5 เราได้กล่าวไปแล้วว่า แรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ (action of uncontrollable input) ซึ่งกระทำกับระบบพลวัตภายในจะอยู่ในรูปของแรงไม่อนุรักษ์อื่นๆ ที่ไม่ได้มาจากตัวควบคุม แรงดังกล่าวจะมีผลต่อเสถียรภาพของพลวัตศูนย์ ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาเงื่อนไขที่ทำให้แรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ซึ่งเมื่อกระทำกับพลวัตภายในแล้ว ส่งผลให้พลวัตศูนย์ของระบบทางกล 2 DOF เกิดพลวัตศูนย์ที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ การหาเงื่อนไขของแรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ที่จะกล่าวต่อไปนี้ อาศัยหลักการคือ 1.) Energy Shaping : เพื่อกำหนดจุดสมดุลของพลวัตศูนย์จากค่าต่ำสุดวงกว้างของฟังก์ชันพลังงานศักย์ และ 2.) Damping Injection : เพื่อทำให้สถานะของพลวัตศูนย์เข้าสู่จุดสมดุลดังกล่าวโดยการเพิ่มแรงหน่วงในระบบพลวัตศูนย์ ประพจน์ต่อไปนี้จะเงื่อนไขเพียงพอในการออกแบบพลวัตของแรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ ซึ่งทำให้ระบบทางกล 2 DOF ที่เป็น Underactuated เป็นระบบที่มีเฟสต่ำที่สุด

ประพจน์ 7 พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการพลวัต
ศูนย์ สำหรับระบบทางกล 2 DOF ที่เป็น Underactuated
กำหนดโดยสมการเชิงอนุพันธ์สเกลาร์

$$m(\eta)\ddot{\eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial m(\eta)}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + g(\eta) = \tau \quad (19)$$

โดยที่ $m(\eta) \neq 0, \forall \eta \in \mathcal{R}$ และ $g(\eta) \equiv \partial V(\eta)/\partial \eta$
ให้ τ เป็นแรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ (action of
uncontrollable input) กำหนดโดย

$$\tau = -\frac{\partial V_c(\eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial f(\dot{\eta})}{\partial \dot{\eta}} \quad (20)$$

สอดคล้องกับ

1. (Energy shaping) มีฟังก์ชัน $V_c(\eta)$
ซึ่งทำให้ $V_d(\eta) \equiv V(\eta) + V_c(\eta)$
มีค่าต่ำสุดวงกว้างเพียงค่าเดียว (unique global
minimum) ที่ $\eta = \eta^*$ (เป็นค่าคงที่)
2. (Damping injection) มีฟังก์ชัน $f(\dot{\eta})$
สอดคล้องกับ

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\eta}}(0) = 0 \text{ และ } \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{\eta}}(\dot{\eta}) \geq 0, \forall \dot{\eta} \in \mathcal{R}$$

ภายใต้เงื่อนไขดังกล่าว จุดสมดุล $[\eta, \dot{\eta}]^T = [\eta^*, 0]^T$
ของสมการพลวัตศูนย์ (19) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ
นั่นคือ ระบบไม่เชิงเส้น (10) เป็นระบบที่มีเฟสต่ำที่สุด
□

การพิสูจน์ การมีอยู่ (existence) ของจุดสมดุลของ
สมการพลวัตศูนย์ โดยแทนค่าสมการ (20) ใน (19)
จะได้

$$m(\eta)\ddot{\eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial m(\eta)}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + \frac{\partial V_d(\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial f(\dot{\eta})}{\partial \dot{\eta}} = 0 \quad (21)$$

ที่จุดสมดุล $[\eta, \dot{\eta}]^T = [\eta^*, 0]^T$ แทนค่าในสมการ (21)
จะได้

$$\frac{\partial V_d}{\partial \eta}(\eta) = 0 \Leftrightarrow \eta = \eta^* \quad (22)$$

นั่นคือ จุดสมดุลของระบบพลวัตศูนย์ พิจารณาได้จาก
จุดวิกฤตของฟังก์ชันพลังงานศักย์ V_d ตรวจสอบ
เสถียรภาพ ของจุดสมดุลจากวิธีการโดยตรงของ

เลียปูนอฟ (Lyapunov's direct method) กำหนดฟังก์ชัน
เลียปูนอฟ

$$\mathcal{V}(\eta) = \frac{1}{2} m(\eta) \dot{\eta}^2 + V(\eta) - V(\eta^*) > 0$$

พิจารณานูพันธ์รวมของฟังก์ชันเลียปูนอฟ $\mathcal{V}(\eta)$
เทียบกับเวลา t จะได้

$$\dot{\mathcal{V}}(\eta) = m(\eta)\dot{\eta}\ddot{\eta} + \dot{\eta}^3 \frac{\partial m(\eta)}{\partial \eta} - \frac{dV(\eta^*)}{dt} = -\dot{\eta} \frac{\partial f(\dot{\eta})}{\partial \dot{\eta}} \leq 0$$

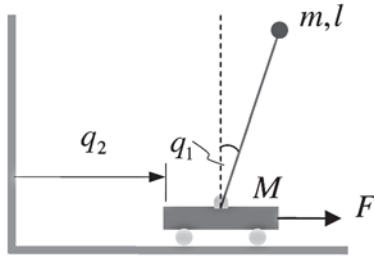
จากหลักการไม่แปรผันของลาแซล (LaSalle's principle
of invariant) (Vidyasagar, 1993)

$$\dot{\mathcal{V}}(\eta) \equiv 0 \Rightarrow \dot{\eta} = 0 \Rightarrow \eta = \bar{\eta} = \text{ค่าคงที่}$$

กำหนดตัวแปรสถานะ $x = [\eta - \bar{\eta}, \dot{\eta}]^T$ จะได้ว่ามี
ค่าศูนย์ ($x = 0$) เพียงค่าเดียวที่เป็นผลเฉลย ดังนั้น
จุดสมดุลของระบบพลวัตศูนย์มีเสถียรภาพเชิงเส้น
กำกับวงกว้าง (globally asymptotically stable) และ
โดยบทนิยาม 4 จึงสรุปได้ว่าระบบไม่เชิงเส้น (10) เป็น
ระบบเฟสต่ำที่สุด ■

เราใช้ประโยชน์จากประพจน์ 7 ในการปรับปรุง
เสถียรภาพของพลวัตศูนย์ของระบบทางกล 2 DOF ซึ่ง
มีรูปแบบทั่วไปตามสมการ (10) พลวัตศูนย์ของ
ระบบที่ไม่เสถียรหรือระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด (NMP)
สามารถแก้ไขโดยการใส่แรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้
ตามสมการ (20) ซึ่งการเพิ่มขึ้นส่วนทางกลบางชิ้นให้
มีพฤติกรรมสอดคล้องกับสมการ (20) นั้นให้ผลใน
ลักษณะเป็นโมเมนต์ด้านการเคลื่อนที่ (counter moment)
เดิม (ไม่เสถียร) ของพลวัตศูนย์ ทำให้พลวัตศูนย์มี
เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับและระบบภายหลังการปรับปรุง
จะเป็นระบบเฟสต่ำที่สุด เราจะอธิบายแนวคิดดัง
กล่าวจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง (The Inverted Pendulum) พิจารณาระบบ
ลูกตุ้มผกผัน ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2. The Inverted Pendulum

ระบบลูกตุ้มผกผันเป็นระบบ Underactuated โดยมี 2 DOF : (q_1, q_2) ซึ่งมี F เป็นแรงภายนอกที่ควบคุมได้ กระทำที่ q_2 ดังนั้นพลวัตของ q_1 จึงเป็นพลวัตภายในของระบบ สมการของการเคลื่อนที่ที่พิจารณาจากสมการ EL จะได้

$$ml^2\ddot{q}_1 + ml \cos q_1 \ddot{q}_2 - mgl \sin q_1 = 0 \quad (23)$$

$$ml \cos q_1 \ddot{q}_1 + (m + M)\ddot{q}_2 - ml \sin q_1 \dot{q}_1^2 = F \quad (24)$$

การวิเคราะห์เสถียรภาพของพลวัตศูนย์ จำแนกได้เป็น 2 กรณีคือ

เมื่อให้ $y = q_1$ เป็นสัญญาณออก จะได้ว่าระบบอยู่ในกรณีที่ 3 ซึ่งมีสมการพลวัตศูนย์ในรูป $\dot{q}_2 = 0$ นั่นคือ ถ้าปราศจากแรงภายนอกมากระทำระบบจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ จากบทตั้ง 5 จะได้ว่าพลวัตศูนย์ของระบบไม่มีความเสถียร นอกจากนั้นที่ตำแหน่ง $q_1 = \pm \pi/2$ ระบบจะอยู่ในภาวะเอกฐาน เมื่อให้ $y = q_2$ เป็นสัญญาณออก จะได้ว่าระบบอยู่ในกรณีที่ 4 ซึ่งมีสมการพลวัตศูนย์อยู่ในรูป

$$\ddot{q}_1 = (g/l) \sin q_1 \quad (25)$$

จากบทตั้ง 5 จะได้ว่ากรณีนี้พลวัตศูนย์ของระบบไม่มีความเสถียรเช่นกัน

ดังนั้น ระบบลูกตุ้มผกผันเป็นระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด (NMP)

การปรับปรุงเสถียรภาพของพลวัตศูนย์ โดยเราจะพิจารณาให้มีการเพิ่มแรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ τ ในโคออร์ดิเนต q_1 ซึ่งเป็นพลวัตภายในของระบบจากสมการ (23) จึงได้ว่า

$$ml^2 \ddot{q}_1 + ml \cos q_1 \ddot{q}_2 - mgl \sin q_1 = \tau \quad (26)$$

เพื่อให้พลวัตศูนย์ของสมการ (26) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ อาศัยประพจน์ 7 ในการออกแบบดังนี้

1. (Energy shaping) เลือก $V_c(q_1) = -m_* l_* g \cos q_1$

จะได้ว่า $V_d(q_1) = (ml - m_* l_*) g \cos q_1$ ทำให้ $\partial V_d(q_1)/\partial q_1 = 0$ และ $\partial^2 V_d(q_1)/\partial q_1^2 > 0$ เมื่อ $m_* l_* > ml$ นั่นคือ V_d มีค่าต่ำสุดวงกว้างที่จุดกำเนิด ถ้าเราออกแบบให้พารามิเตอร์ $m_* l_* > ml$ เป็นค่าเท่าใดก็ได้ (arbitrary)

2. (Damping injection) กำหนดให้ $f(\dot{q}_1) = \frac{1}{2} c \dot{q}_1^2$

โดยที่ $c > 0$ จะได้ว่า $\partial f(0)/\partial \dot{q}_1 = 0$ และ $\dot{q}_1 (\partial f(\dot{q}_1)/\partial \dot{q}_1) = c \dot{q}_1^2 \geq 0$ ดังนั้น จากสมการ (20) จะได้แรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ กำหนดโดย

$$\tau = -m_* l_* g \sin q_1 - c \dot{q}_1 \quad (27)$$

ดังนั้น สมการ EL ของระบบลูกตุ้มผกผันที่ปรับปรุงเสถียรภาพของพลวัตศูนย์แล้วอยู่ในรูป

$$ml^2 \ddot{q}_1 + ml \cos q_1 \ddot{q}_2 + c \dot{q}_1 + (m_* l_* - ml) g \sin q_1 = 0 \quad \text{โดยที่ } ml < m_* l_* \quad (28)$$

$$ml \cos q_1 \ddot{q}_1 + (m + M) \ddot{q}_2 - ml \sin q_1 \dot{q}_1^2 = \tau \quad (29)$$

การตรวจสอบเสถียรภาพของพลวัตศูนย์ ในบทความนี้เราจะตรวจสอบเสถียรภาพของระบบที่ปรับปรุงแล้วโดยวิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical method) อาศัยวิธีการโดยตรงของเลียปูนอฟ (Lyapunov's direct method) ขั้นแรกเขียนพลวัตศูนย์จากสมการ (28) (วิธีการเดียวกับการหาพลวัตศูนย์ในหัวข้อ 5) โดยให้

$$q_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{q}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \ddot{q}_2(t) \equiv 0 \quad \text{จะได้} \quad (30)$$

$$ml^2 \ddot{q}_1 + c \dot{q}_1 + (m_* l_* - ml) g \sin q_1 = 0$$

เมื่อเขียนในรูปสมการสถานะ (state equation) กำหนดตัวแปรสถานะ $x_1 = q_1$ และ $x_2 = \dot{q}_1$

$$\text{จะได้} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - bx_2 \end{cases}$$

โดยที่ $a = (m_* l_* - ml)g/ml^2$ และ $b = c/ml^2$ เป็นค่าคงที่บวก

กำหนดฟังก์ชันเลียปูนอฟ

$$V(x) = a(1 - \cos x_1) + (1/2)x_2^2 > 0$$

จะได้

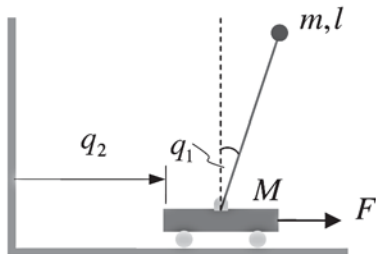
$$\dot{V}(x) = ax_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = -bx_2^2 \leq 0$$

จากหลักการไม่แปรผันของลาแซล (LaSalle's principle of invariant) (Vidyasagar, 1993)

$$\dot{V}(x) \equiv 0 \Rightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_1(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0$$

นั่นคือมี $x(t) \equiv 0$ เป็นผลเฉลยเพียงค่าเดียว ซึ่งหลักการไม่แปรผันของลาแซล จึงเพียงพอที่จะสรุปได้ว่าจุดสมดุล (อยู่ที่จุดกำเนิด) ของพลวัตศูนย์มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับวงกว้าง และโดยบทนิยาม 4 จะได้ว่า พลวัตศูนย์ของระบบลูกตุ้มผกผันที่ปรับปรุงเสถียรภาพแล้ว (สมการ (28)) เป็นระบบเฟสต่ำที่สุด

การใช้โครงสร้างทางกลทำให้เกิดแรงภายนอกทั่วไปที่ควบคุมไม่ได้ ทำโดยการเพิ่มขึ้นส่วนทางกลบางชิ้นที่มีพฤติกรรมสอดคล้องกับสมการ (27) เพิ่มเข้าในระบบหรือกล่าวอีกอย่างคือเราต้องปรับปรุงระบบลูกตุ้มผกผันเดิม (สมการ (23)-(24)) ให้มีพฤติกรรมเหมือนกับระบบที่ปรับปรุงแล้วตามสมการ (28)-(29) จะเห็นว่าขั้นตอน Energy shaping มีความหมายทางกายภาพเป็นการเพิ่มมวลถ่วงสมดุลเข้าในระบบดังรูปที่ 3



รูปที่ 3. The Inverted pendulum with counter moments

สังเกตได้โดยง่ายว่าระบบที่ปรับปรุงแล้วเสมือนเป็นระบบลูกตุ้มอย่างง่าย (simple pendulum) กล่าวคือจุดศูนย์ถ่วงของระบบได้เปลี่ยนมาอยู่ต่ำกว่าแกนหมุน ($m_* l_* > ml$) และขั้นตอน Damping injection เป็นการดึงให้สถานะ $q_1, \dot{q}_1$ เข้าสู่จุดสมดุลโดยมีความหมายทางกายภาพเหมือนการเพิ่มตัวหน่วง (damper) เข้าในระบบ

สรุปผลและวิจารณ์

บทความนี้ได้เสนอแนวคิดใหม่ของการปรับปรุงเสถียรภาพของระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด (NMP) โดยแนวคิดหลักคือ การเพิ่มแรง/โมเมนต์ด้านการเคลื่อนที่ในส่วนพลวัตศูนย์ของระบบ ซึ่งแรงดังกล่าวไม่ได้มาจากการควบคุมภายนอก ในบทความจึงเรียกว่าแรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ (action of uncontrollable input) เราสามารถทำให้แรงที่กล่าวถึงนี้เกิดขึ้นได้โดยใช้ชิ้นส่วนของระบบทางกลที่มีพฤติกรรมสอดคล้องกับแรงดังกล่าว (control by mechanical structure) เพิ่มเติมเข้าในส่วนพลวัตศูนย์ของระบบชิ้นส่วนทางกลที่เพิ่มเติมเข้าไบนั้นมีลักษณะเป็น passive actuator

บทความได้นำระบบลูกตุ้มผกผัน (inverted pendulum) มาใช้ในการอธิบายโดยพลวัตศูนย์ของระบบลูกตุ้มผกผันก่อนการปรับปรุงมีภาวะไม่เสถียร (unstable) (ตำแหน่งของลูกตุ้มอยู่ด้านบนและจุดศูนย์ถ่วงของพลวัตศูนย์อยู่ด้านล่าง) จึงเป็นระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด (NMP) การเพิ่มขึ้นส่วนทางกลที่ทำให้เกิดแรง/โมเมนต์ด้านการเคลื่อนที่ในส่วนพลวัตศูนย์นั้น ทำโดยการเพิ่มมวลถ่วงสมดุลตรงข้ามแนวแกนของลูกตุ้ม โดยมีเงื่อนไขว่า $m_* l_* > ml$ ผลคือเกิดโมเมนต์ $m_* l_* \sin q_1$ ด้านโมเมนต์ของระบบเดิม (ตำแหน่งของลูกตุ้มยังคงอยู่ด้านบนแต่จุดศูนย์ถ่วงของพลวัตศูนย์อยู่ด้านล่าง) ในขั้นตอนนี้พลวัตศูนย์ของระบบลูกตุ้มผกผันมีความเสถียร (unstable) แล้วแต่ยังไม่เพียงพอ (ยังคงเป็นระบบเฟสไม่ต่ำที่สุดอยู่) เนื่องจากเราต้องการให้พลวัตศูนย์เกิดเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable) จึงต้องเพิ่มแรง

ด้านเข้าในระบบด้วยการใส่ตัวหน่วง (damper) ทำให้ระบบภายหลังการปรับปรุงเป็นระบบลูกตุ้มผกผันที่มีมวลถ่วงสมดุลและตัวหน่วง (รูปที่ 3) เป็นระบบเฟสต่ำที่สุด (minimum-phase system) อย่างไรก็ตาม ประพจน์ 7 ให้เงื่อนไขเพียงพอ (sufficient condition) ที่ทำให้พลวัตศูนย์มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับเท่านั้นแรงภายนอกที่ควบคุมไม่ได้ซึ่งทำหน้าที่เป็นแรง/โมเมนต์ด้านการเคลื่อนที่ของพลวัตภายในนั้นอาจอยู่ในรูปแบบอื่น เช่น การเพิ่มโครงสร้างของลำตัวได้น้ำในการเคลื่อนที่ของ Swimming Machine (Saimek และ Li, 2004) ก็ทำให้ระบบเฟสไม่ต่ำที่สุด (NMP) เปลี่ยนเป็นระบบเฟสต่ำที่สุดได้ หรือการเพิ่มมวลถ่วงสมดุลและแรงด้านการเคลื่อนที่ให้กับระบบลูกตุ้มผกผันซึ่งเป็นวิธีหนึ่งในการปรับปรุงเสถียรภาพของพลวัตศูนย์ที่ใช้ในบทความนี้

เอกสารอ้างอิง

- Arnold, V.I. 1989. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. 2nd edition. Graduate Texts in Mathematics 60. Berlin: Springer-Verlag.
- Ding, Z. 2001. Backstepping stabilization of nonlinear systems with a nonminimum phase zero. **Proc. 40th IEEE Conf. on Decision and Control**. Orlando, USA.: 85-86
- Ding, Z. 2003. Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems with unstable internal dynamics. **IEEE Trans. Auto. Control**. 48(10): 1788-1792
- Isidori, A. 1995. **Nonlinear control systems**. 3rd edition. Berlin: Springer-Verlag.
- Isidori, A. 2000. A tool for semiglobal stabilization of uncertain nonminimum-phase nonlinear systems via output Feedback. **IEEE Trans. Autom. Control**. 45(10): 1817-1827
- Kokotovic, P.V., Krstic, M., and Kanellakopoulos, I.1992. Backstepping to passivity: Recursive design of adaptive systems. **IEEE Conf. on Decision and Control, Tucson, AZ**.:3276-3280.
- Middleton, R.H. 1997. Conservation laws and performance limitations in control. **Proc. IEEE Singapore Int. Symp. on Control Theory and Applications**.: 1-11.
- Mnif, F. 2005. VSS Control for a Class of Underactuated Mechanical Systems. **International Journal of Computational Cognition**. Vol. 3 No. 2, June.
- Murray, R.M. and Hauser, J. 1990. A case study in approximate linearization: The acrobat example. **Proc. American Control Conference**.
- Olfati-Saber, R. 2001. **Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles**. PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science. Massachusetts Institute of Technology.
- Saimek, S. and Li, P. 2004. Motion planning and control of a swimming machine. **The International Journal of Robotics Research**. Vol.23, no.1, January: 27-35
- Spong, M.W. and Block, D.J. 1995. The pendubot: A mechatronic system for control research and education. **34th IEEE Conf. on Decision and Control**.
- Spong, M.W. 1996. Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. **13th IFAC Triennial World Congress, San Francisco**.: 431-435
- Spong, M.W., Hutchinson, S., and Vidyasagar, M. 2006. **Robot modeling and control**. Hoboken: John Wiley & Sons.
- Vidyasagar, M. 1993. **Nonlinear systems analysis**. 2nd edition. New Jersey: Prentice Hall.