

ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก

Generalized Beauty: The Product of an n -Digit Number with 1's as All Its Digits and an $(n+2)$ -Digit Number with n 's as Its First and Last Digits and 1's as All Inner n Digits

พีระพงษ์ เครื่องสนุก¹, เพชรรัตน์ เอี่ยมสอาด¹ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์^{1*}
Peerapong Kreangsasuk¹, Phetcharat Iamsaart¹ and Aiyared Iampan^{1*}

Abstract

In this paper we apply the remainder number and the Principle of Mathematical Induction to obtain general form of product of an n -digit number with 1's as all its digits and an $(n+2)$ -digit number with n 's as its first and last digits and 1's as all inner n digits. The result shows that the general form of the product is

$$n\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n} \times n\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n} = n(n+1)\dots(n+n-1)n(n+n-1)\dots(n+1)n \text{ for any positive integer } n.$$

Keywords: Remainder number, product, n -digit number with 1's as all its digits

¹สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อ.เมือง จ.พะเยา 56000

*ผู้ให้การติดต่อ (Corresponding E-mail: aiyared.ia@up.ac.th)

รับบทความวันที่ 25 กรกฎาคม 2557 รับลงตีพิมพ์วันที่ 3 ธันวาคม 2557

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือและหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก ผลการศึกษาพบรูปทั่วไปของผลคูณดังกล่าว ดังนี้

$$\underbrace{n \times 111 \dots 1}_{\#(1)=n} \times \underbrace{n \times 111 \dots 1}_{\#(1)=n} = n(n+1) \dots (n+n-1)n(n+n-1) \dots (n+1)n \text{ สำหรับจำนวนเต็มบวก } n$$

คำสำคัญ: จำนวนเศษเหลือ, ผลคูณ, จำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1

บทนำ

การคำนวณผลลัพธ์ทางพีชคณิตของระบบจำนวน มีความสำคัญและเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของเราเป็นอย่างมาก การคำนวณผลลัพธ์บางอย่างของจำนวนที่มีจำนวนหลักมาก ๆ ยิ่งทำให้การคำนวณมีความยุ่งยากและซับซ้อนมากขึ้น เครื่องมือบางอย่างเช่น เครื่องคิดเลข และคอมพิวเตอร์ อาจไม่สามารถหาผลลัพธ์ให้เราได้ ดังนั้น หากเราสามารถหาสูตรลัด ซึ่งเป็นเครื่องมือที่มีความเหมาะสมในการคำนวณผลลัพธ์ของจำนวนที่มีจำนวนหลักมาก ๆ ได้ ก็จะเพิ่มความสะดวกให้มากขึ้น ดังนั้น เราจึงสนใจที่จะศึกษาลักษณะทางพีชคณิตของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 โดยการศึกษาและหารูปทั่วไปทางพีชคณิตของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 นั้น ได้มีการศึกษาในหลายรูปแบบ ซึ่งได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ ดังนี้ สำหรับการศึกษาศึกษาและประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือเริ่มเมื่อปี พ.ศ. 2554 โดยอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่า ผลการยกกำลังสองของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 นี้ สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$(1_n)^2 = 123 \dots (n-1)n(n-1) \dots 321$$

ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่า ผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m แทนเลขหลักสิบและ n แทนเลขหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+n \leq 9$ จะได้ว่า

$$\underbrace{mn \times 111 \dots 1}_{\#(1)=k} = \underbrace{m(m+n)(m+n) \dots (m+n)}_{\#(m+n)=k-1} n$$

กำหนดให้ m แทนเลขหลักสิบและ n แทนเลขหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+1=t, m+n=r, s$ และ $10 \leq m+n \leq 18$ จะได้ว่า

$$\underbrace{mn \times 111 \dots 1}_{\#(1)=k} = \underbrace{(m+1)(r+s)(r+s) \dots (r+s)}_{\#(r+s)=k-2} sn$$

นิคม หวลอารมณ์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนเต็มใด ๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มจำนวนเดียวกัน โดยในกรณีเฉพาะเป็นจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 นั้น สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n และ เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า

$$\underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=p} \times n = \underbrace{nnn\dots n}_{\#(n)=p} \text{ และ } \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=p} \times (-n) = \underbrace{(-n)(-n)(-n)\dots(-n)}_{\#(-n)=p} \quad (\text{ดู(3)})$$

ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสามหลัก และสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่า ผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ q, p, s และ r เป็นจำนวนนับ โดยที่ $qpsr = {}_q p \parallel_s r$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geq 2$ จะได้ว่า

$${}_q p \parallel_s r \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} = {}_q p {}_q p \underbrace{({}_q p \boxplus_s r)({}_q p \boxplus_s r)({}_q p \boxplus_s r)\dots({}_q p \boxplus_s r)}_{\#({}_q p \boxplus_s r)=n-2} {}_s r {}_s r$$

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้ศึกษาและหาความสัมพันธ์ของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับสมการเชิงเส้น โดยได้พบว่า ความสัมพันธ์นี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} = 9 \times 123\dots(n-3)(n-2)(n-1) + n$$

กรกนก ชุมภูรัตน์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับพหุคูณของเลขโดด 9 โดยได้พบว่า ผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$n \times 9 \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=m} = (n-1) \underbrace{999\dots 9}_{\#(9)=m-1} (10-n)$$

บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือ และพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักได้แก่ ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) (Clark, 2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a = b \cdot q + r \text{ และ } 0 \leq r < |b|$$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

(1) $P(n_0)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของ

บทความนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554) และ ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b=10$ ทำให้ได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่งจะได้ $a=10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม

$$a := {}_q r \quad (1)$$

เช่น

$$\begin{array}{ccccc} 0 = {}_0 0 & 20 = {}_2 0 & 60 = {}_6 0 & 180 = {}_{18} 0 & 200 = {}_{20} 0 \\ 1 = {}_0 1 & 21 = {}_2 1 & 61 = {}_6 1 & 181 = {}_{18} 1 & 201 = {}_{20} 1 \\ 2 = {}_0 2 & 22 = {}_2 2 & 62 = {}_6 2 & 182 = {}_{18} 2 & 202 = {}_{20} 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 9 = {}_0 9 & 29 = {}_2 9 & 69 = {}_6 9 & 189 = {}_{18} 9 & 209 = {}_{20} 9 \end{array}$$

และ

$$\begin{array}{ccccc} 0 = {}_0 0 & -20 = {}_{-2} 0 & -60 = {}_{-6} 0 & -180 = {}_{-18} 0 & -200 = {}_{-20} 0 \\ -1 = {}_{-1} 9 & -21 = {}_{-3} 9 & -61 = {}_{-7} 9 & -181 = {}_{-19} 9 & -201 = {}_{-21} 9 \\ -2 = {}_{-1} 8 & -22 = {}_{-3} 8 & -62 = {}_{-7} 8 & -182 = {}_{-19} 8 & -202 = {}_{-21} 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -9 = {}_{-1} 1 & -29 = {}_{-3} 1 & -69 = {}_{-7} 1 & -189 = {}_{-19} 1 & -209 = {}_{-21} 1 \end{array}$$

เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_0 r$ ด้วย r สำหรับจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0 \leq r < 10$ เช่น ${}_0 2 = 2$ และ ${}_0 4 = 4$

บทนิยาม 1 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) กำหนดให้ ${}_Z \mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (1) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_Z \mathcal{R} = \{{}_q r \mid q, r \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \leq r < 10\} \quad (2)$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_Z \mathcal{R}$ ว่า **จำนวนเศษเหลือ** (remainder number)

จากการแปลงเลขฐานสิบใน (1) นั้น จะเห็นว่าเลขที่ถูกแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่ายจะแนะนำการแปลงเลขจาก (1) กลับไปเป็นเลขฐานสิบที่ทุกคนคุ้นเคย

เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (1) กลับไปเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีความมากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีความมากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษเหลือ ${}_q r$ เมื่อ q คือ ผลหาร และ r คือ เศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้ว

นำผลหาร q ไปทดทีที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทดจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $9_1 04_{25} 8_4 22_{-16} 5_{73} 45_{-12} 98_{-6} 81$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned} & 9_1 04_{25} 8_4 22_{-16} 5_{73} 45_{-12} 98_{-6} 81 \\ &= (9+1)0(4+25)(8+4)2(2-16)(5+73)4(5-12)9(8-6)81 \\ &= (10)0(29)(12)2(-14)(78)4(-7)9281 \\ &= {}_1 00_2 {}_9 1 22_{-2} {}_6 {}_7 84_{-1} 39281 \\ &= 10(0+2)(9+1)2(2-2)(6+7)8(4-1)39281 \\ &= 102(10)20(13)8339281 \\ &= 102_1 020_1 38339281 \\ &= 10(2+1)02(0+1)38339281 \\ &= 10302138339281 \end{aligned}$$

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ถนัดนัก ดังนั้น บทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย และได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) $\boxplus$ บน ${}_Z \mathcal{R}$ โดย

$${}_q r \boxplus {}_t s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s); & 0 \leq r+s \leq 9 \\ {}_{(q+t)+b} a & ; r+s \geq 10, r+s = {}_b a \end{cases} \quad \text{สำหรับทุก } {}_q r, {}_t s \in {}_Z \mathcal{R}$$

บทตั้ง 1 (ณัฐวุฒิ พลอาสา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = {}_q r$ แล้ว

$$-n = \begin{cases} {}_{-q} 0 & ; r = 0 \\ {}_{-(q+1)}(10-r) & ; r \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับบทความนี้ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556) กำหนดให้ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \leq s_i \leq 9$ จะได้ว่า

$${}_m s_1 s_2 s_3 \dots s_n = m \cdot \underbrace{1000 \dots 0}_{\#(0)=n} + s_1 s_2 s_3 \dots s_n \quad (4)$$

ในการศึกษาหัวข้อถัดไป จะใช้สัญลักษณ์ $\#(n)$ แทนจำนวนของ n ที่เรียงติดกัน สำหรับจำนวนเต็ม n เช่น $\#(1)$ แทนจำนวนของ 1 ที่เรียงติดกัน และ $\#(0)$ แทนจำนวนของ 0 ที่เรียงติดกัน เช่น $\underbrace{111 \dots 1}_{\#(1)=5} \underbrace{000 \dots 0}_{\#(0)=6} = 11111000000$ และจะแสดงผลการศึกษาหลักของบทความนี้ ซึ่งประกอบด้วย

ข้อสังเกตที่พบความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดด

ทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก จนนำไปสู่การศึกษาและการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก อีกทั้งยังให้ตัวอย่างที่ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทหลักด้วย

ผลการศึกษาหลัก

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก ทำให้เราเห็นความสัมพันธ์บางอย่างที่น่าสนใจและแสดงให้เห็นถึงความสวยงามของผลคูณดังนี้

$$\begin{aligned} \#(1) = 1: & \quad 111 \times 1 = 111 \\ \#(1) = 2: & \quad 2112 \times 11 = 23232 \\ \#(1) = 3: & \quad 31113 \times 111 = 3453543 \\ \#(1) = 4: & \quad 411114 \times 1111 = 456747654 \\ \#(1) = 5: & \quad 5111115 \times 11111 = 56789598765 \end{aligned} \quad (5)$$

จากความสัมพันธ์ (5) เราสังเกตเห็นว่าผลคูณของ $\underbrace{n111\dots1n}_{\#(1)=n}$ กับ $\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n}$ เมื่อ $n=1,2,\dots,5$ จะมีลักษณะคือ หลักแรก หลักตรงกลาง และหลักสุดท้าย มีค่าเท่ากับจำนวนหลักของเลข 1 ส่วนเลขในหลักอื่น ๆ จะเป็นเลขเรียงกันอย่างสวยงาม ซึ่งเราสามารถเขียนความสัมพันธ์นี้ด้วยสมการเพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจได้ดังนี้

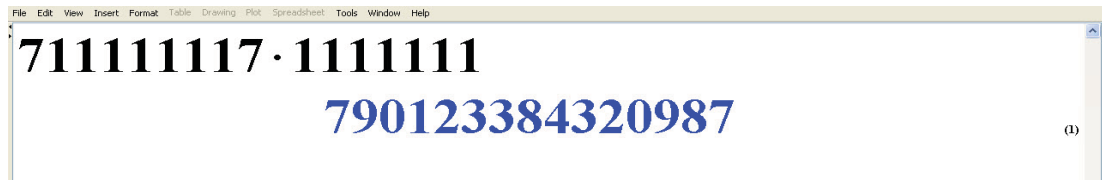
$$\underbrace{n111\dots1n}_{\#(1)=n} \times \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n} = n(n+1)\dots(n+n-1)n(n+n-1)\dots(n+1)n \quad \text{เมื่อ } n=1,2,3,4,5$$

ต่อไปเราจะยกตัวอย่างที่นำไปสู่การศึกษาหลัก ซึ่งโดยทั่วไปแล้วการหาคำตอบในตัวอย่าง 1 นั้นสามารถหาคำตอบสุดท้ายได้ยาก แต่ถ้าหากใช้ข้อสังเกตที่เราค้นพบในข้างต้น จะเห็นได้ทันทีว่าการหาคำตอบนั้นสามารถทำได้ง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 1 ผลลัพธ์ของ $\underbrace{7111\dots17}_{\#(1)=7} \times \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=7}$ สามารถคำนวณหาได้อย่างถูกต้องและสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (5) ที่เราพบ ดังนี้

$$\begin{aligned} \underbrace{7111\dots17}_{\#(1)=7} \times \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=7} &= 789(10)(11)(12)(13)7(13)(12)(11)(10)987 \\ &= 789_1 0_1 1_1 2_1 3_1 7_1 3_1 2_1 1_1 0987 \\ &= 78(10)123384320987 \\ &= 78_1 0123384320987 \\ &= 790123384320987 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ



รูปที่ 1. $\underbrace{7111\dots17}_{\#(1)=7} \times \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=7}$

ฉะนั้น จากความสัมพันธ์ (5) เราจึงสรุปเป็นข้อสังเกตได้ดังต่อไปนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก ได้หรือไม่

(2) หากเราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณนี้ได้ แล้วรูปทั่วไปของผลคูณที่ได้จะมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (5) ที่เราพบหรือไม่

บทตั้งต่อไปนี้มีมีความสำคัญอย่างมากสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

บทตั้ง 2 สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n จะได้ว่า

$$\underbrace{m111\dots1m}_{\#(1)=n+1} = \underbrace{m111\dots1m}_{\#(1)=n} + (9 \cdot m + 1) \underbrace{000\dots0}_{\#(0)=n+1} \quad (6)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \underbrace{m111\dots1m}_{\#(1)=n} + (9 \cdot m + 1) \underbrace{000\dots0}_{\#(0)=n+1} &= (m + 9 \cdot m + 1) \underbrace{111\dots1m}_{\#(1)=n} \\ &= (10 \cdot m + 1) \underbrace{111\dots1m}_{\#(1)=n} \\ &= \underbrace{m111\dots1m}_{\#(1)=n} \\ &= \underbrace{m111\dots1m}_{\#(1)=n+1} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\underbrace{m111\dots1m}_{\#(1)=n+1} = \underbrace{m111\dots1m}_{\#(1)=n} + (9 \cdot m + 1) \underbrace{000\dots0}_{\#(0)=n+1}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n $\square$

บทตั้ง 3 สำหรับจำนวนเต็มบวก m, n และ k จะได้ว่า

$$\underbrace{k000\dots0}_{\#(0)=m} \times \underbrace{111\dots1}_{\#(0)=n} = \underbrace{kkk\dots k}_{\#(k)=n} \underbrace{000\dots0}_{\#(0)=m} \quad (7)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& k \underbrace{000\dots 0}_{\#(0)=m} \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(0)=n} \\
&= k \times \underbrace{1000\dots 0}_{\#(0)=m} \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(0)=n} \\
&= k \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(0)=n} \underbrace{1000\dots 0}_{\#(0)=m} \\
&= \underbrace{111\dots 1}_{\#(0)=n} \underbrace{1000\dots 0}_{\#(0)=m} + \underbrace{111\dots 1}_{\#(0)=n} \underbrace{1000\dots 0}_{\#(0)=m} + \underbrace{111\dots 1}_{\#(0)=n} \underbrace{1000\dots 0}_{\#(0)=m} + \dots + \underbrace{111\dots 1}_{\#(0)=n} \underbrace{1000\dots 0}_{\#(0)=m} \\
&\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{k \text{ ครั้ง}} \\
&= \underbrace{kkk\dots k}_{\#(k)=n} \underbrace{000\dots 0}_{\#(0)=m}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $k \underbrace{000\dots 0}_{\#(0)=m} \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(0)=n} = \underbrace{kkk\dots k}_{\#(k)=n} \underbrace{000\dots 0}_{\#(0)=m}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก m, n และ k $\square$

บทตั้ง 4 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$\underbrace{1000\dots 01}_{\#(0)=n+1} \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} = \underbrace{111\dots 100}_{\#(1)=n} \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} \quad (8)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\underbrace{1000\dots 01}_{\#(0)=n+1} \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} &= (\underbrace{1000\dots 0}_{\#(0)=n+2} + 1) \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} \\
&= \underbrace{111\dots 1000\dots 0}_{\#(1)=n} + \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} \\
&= \underbrace{111\dots 100}_{\#(1)=n} \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\underbrace{1000\dots 01}_{\#(0)=n+1} \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} = \underbrace{111\dots 100}_{\#(1)=n} \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n $\square$

จากบทตั้งทั้งสามทำให้เราได้รับทฤษฎีบทหลัก ดังนี้

ทฤษฎีบท 4 สำหรับจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$n \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} = n(n+1)\dots(n+n-1)n(n+n-1)\dots(n+1)n \quad (9)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$n \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} = n(n+1)\dots(n+n-1)n(n+n-1)\dots(n+1)n$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n

เนื่องจาก $111 \times 1 = 111$ จะได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

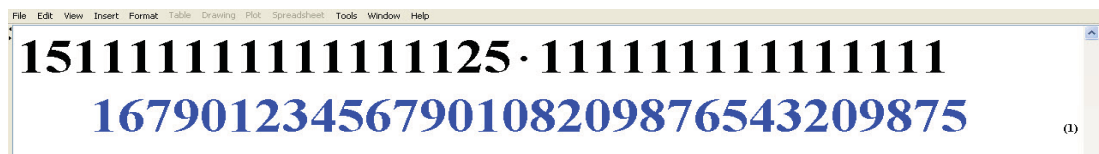
$$k \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=k} \times \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=k} = k(k+1)\dots(k+k-1)k(k+k-1)\dots(k+1)k$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 & (k+1)\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k+1}(k+1)\times\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k+1} \\
 &= [k\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k+1}k + 1\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k+1}1]\times\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k+1} \\
 &= [k\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k}k + (k1-k)\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k+1} + 1\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k+1}1]\times\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k+1} \\
 &= [k\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k}k + (k1-k)\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k+1} + 1\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k+1}1]\times[\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k} + 1\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k}] \\
 &= k(k+1)\dots(k+k-1)k(k+k-1)\dots(k+1)k - (A) \\
 &+ \underbrace{(k1-k)(k1-k)\dots(k1-k)}_{\#(k1-k)=k}\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k+1} - (B) \\
 &+ \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k}\underbrace{100111\dots1}_{\#(1)=k} - (C) \\
 &+ k\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k}k\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k} - (D) \\
 &+ (k1-k)\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k+1}\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k} - (E) \\
 &+ 1\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k+1}\underbrace{1000\dots0}_{\#(0)=k} - (F) \\
 &= (k+k1-k)(k+1+k1-k)\dots(k+k-1+k1-k)k(k+k-1)\dots(k+1)k - (A) + (B) \\
 &+ (k+k1-k)\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k}k\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k} - (D) + (E) \\
 &+ 1\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k}\underbrace{10111\dots1}_{\#(1)=k} - (C) + (F) \\
 &= (k1)(1+k1)\dots(k-1+k1)k(k+k-1)\dots(k+1)k - (G) \\
 &+ (k1)\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k}k\underbrace{000\dots0}_{\#(0)=k} - (H) \\
 &+ \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k+1}\underbrace{10111\dots1}_{\#(1)=k+1} - (I) \\
 &= (k1)(k1+1)(1+k1+1)\dots(k-1+k1+1)(k+k)(k+k-1)\dots(k+1)k - (G) + (H) \\
 &+ \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k+1}\underbrace{10111\dots1}_{\#(1)=k+1} - (I) \\
 &= (k1)(k1+1)(k1+2)\dots(k1+k)(2\cdot k)(k+k-1)\dots(k+1)k - (J) \\
 &+ \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k+1}\underbrace{10111\dots1}_{\#(1)=k+1} - (I) \\
 &= 1(k1+1)(k1+1+1)(k1+2+1)\dots(k1+k-1+1)(k1+k) \\
 &\quad (2\cdot k+1)(k+k-1+1)\dots(k+1+1)(k+1) - (J) + (I)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 16789,123456789,0,07,1,098765431,09875 \\
 &= 1678(9+1)12345678(9+1)(0+1)0(7+1)(1+1)09876543(1+1)09875 \\
 &= 1678(10)12345678(10)108209876543209875 \\
 &= 1678,012345678,0108209876543209875 \\
 &= 167(8+1)01234567(8+1)0108209876543209875 \\
 &= 16790123456790108209876543209875
 \end{aligned}$$

ตรวจสอบคำตอบ



รูปที่ 3. $(15)\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=15}(15)\times\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=15}$

บทสรุป

จากการศึกษาผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อของเราได้ ดังนี้

(1) เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก ได้ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4 ดังนี้

$$n\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n}n\times\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n} = n(n+1)\dots(n+n-1)n(n+n-1)\dots(n+1)n$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n

(2) รูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก ที่ได้นั้น มีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (5) ที่เราสังเกตพบ

จากการสังเกตผลคูณของจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวนที่มีเลขโดดทุกหลักเป็นเลข 1 ยกเว้นหลักแรกและหลักสุดท้ายเป็นจำนวนหลักของเลข 1 ในจำนวนแรก จนกระทั่งสามารถหาและพิสูจน์รูปทั่วไปได้ตามทฤษฎีบท 4 นั้น นับว่าเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้เราหาผลลัพธ์ได้อย่างรวดเร็วและสะดวกมากขึ้น จากบทความนี้และบทความอื่น ๆ ที่ได้อ่านถึง ผู้อ่านจะสังเกตเห็นว่าจำนวนเศษเหลือมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตต่าง ๆ ฉะนั้นหากผู้อ่านเริ่มทำการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตที่น่าสนใจของจำนวนเต็มเช่นเดียวกับบทความนี้ก็คาดว่าจะได้สูตรสำหรับการคำนวณเช่นกันและสูตรที่ได้จากการศึกษาจะเป็นการช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่าง ๆ และนอกจากผล

การศึกษาที่ได้รับแล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของรูปทั่วไปและการพิสูจน์อีกด้วย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการ

ทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)

เอกสารอ้างอิง

- กรกนก ชุมภูรัตน์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2557. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับพหุคูณของเลขโดด 9. วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา 7(1): 64-74.
- ณัฐวุฒิ พลอาสาและ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. วารสารนเรศวรพะเยา 6(1): 25-30.
- ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2555. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารวิจัยมหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม 8(15-16): 1-10.
- ธีระยุทธ ชมชื่น และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร 5(10): 61-71.
- นิคม หวลอารมณ์ และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนเต็มใด ๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน. วารสารมหาวิทยาลัยทักษิณ 16(1): 51-58.
- อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรดิตถ์ 8(2): 48-58.
- อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. วารสารนเรศวรพะเยา 4(2): 29-35.
- อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2556. ความสวยงามวางนัยทั่วไป: จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. วารสารวิทยาศาสตร์ มข. 41(4): 919-927.

Clark, W. E. 2002. Elementary Number Theory. Department of Mathematics, University of South Florida.