

จากโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์ : กระบวนการเรียนรู้เรื่องการบวกของนักเรียน  
ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ในชั้นเรียนที่สอนด้วยวิธีการแบบเปิด

From Embodied to Symbolic World: Learning Process in Addition of First  
Grade Students in Classroom taught through Open Approach

เจนสมุท แสงพันธ์<sup>1\*</sup> และ พีระกฤตย์ กันไชยศักดิ์<sup>2</sup>

Jensamut Saengpun<sup>1\*</sup> and Peerakrit Kanchaisak<sup>2</sup>

<sup>1\*</sup>คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (Faculty of Education, Chiang Mai University)

<sup>2</sup>นักวิจัยอิสระ

### บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์กระบวนการเรียนรู้เรื่องการบวกผ่านกระบวนการความเป็นนามธรรมจากโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด งานวิจัยนี้อาศัยแนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีสามโลกทางคณิตศาสตร์ของ David Tall เป็นหลักในการวิเคราะห์ข้อมูลผ่านชิ้นงานนักเรียน และฉากชั้นเรียนด้วยการวิเคราะห์โปรโตคอล ผลการวิจัยพบว่านักเรียนแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการบวกจากการบีบอัดที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์บนช่วงห่างของโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์ โดยนักเรียนแก้ปัญหาด้วยแนวคิดของการรวมและเพิ่มขึ้น ด้วยการนับบล็อกหนึ่งหน่วยและแท่งสิบที่แสดงถึงการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบด้วยความรู้ที่นักเรียนเคยเรียนรู้มาแล้ว จากนั้นนักเรียนใช้ไดอะแกรมเป็นสัญลักษณ์เชิงภาพที่พัฒนาขึ้นเป็นเครื่องมือเชิงสัญลักษณ์ในฐานะที่เป็นความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการเพื่อแก้ปัญหาอื่นที่ซับซ้อน

**คำสำคัญ :** กระบวนการนามธรรม ทฤษฎีสามโลกทางคณิตศาสตร์ การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

### Abstract

The study aims to investigate learning process on addition through abstraction process from embodied to symbolic world emerged in a first grade of mathematics classroom using lesson study and open approach. David Tall's theory of three world of mathematics was employed for analyzing the data composed with students' written works and classroom teaching scenarios through protocol analysis. The resulted revealed that students performed their ideas on addition from mechanism of compression of symbols on the spectrum from embodied to symbolic world. Students solved the addition problems with idea of combining and increasing through counting unit and based-ten blocks showed decomposing for make ten as met-before. After that students used and refined diagram as schematic sign which developed to symbolic tool as a thinkable concept in order to solve more complex problems.

**Keywords :** Abstraction Process ; Three world of Mathematics ; Lesson Study and Open Approach

\*Corresponding author, E-mail: jensamut.s@cmu.ac.th

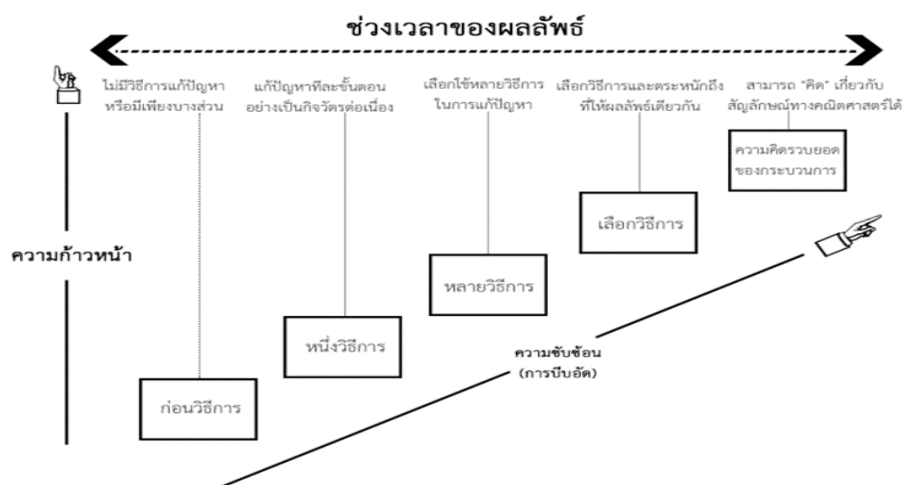
## บทนำ

หลักการสำคัญของการสอนและการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ประการหนึ่งคือ การช่วยให้ผู้เรียนสร้างสิ่งที่คิดอย่างมีความหมายโดยการลงมือปฏิบัติ และสามารถใช้สิ่งที่คิดนั้นได้อย่างยืดหยุ่นและสร้างสรรค์โดยมีเป้าหมายที่ชัดเจนแน่นอน หลักการนี้เอง ครูผู้สอนจำเป็นต้องมีความรู้เกี่ยวกับเส้นทางของพัฒนาการการเปลี่ยนผ่านของการเรียนรู้ เพื่อที่ผู้เรียนในทุกระดับชั้นจะได้มีโอกาสในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เขาจำเป็นต้องใช้ในการเรียนรู้เรื่องอื่นๆ ในอนาคตได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งนั่นคือประเด็นสำคัญของการปฏิรูปการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติ (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) ได้กล่าวไว้ว่า ประเด็นสำคัญสำหรับการปฏิรูปคณิตศาสตร์ศึกษาในปัจจุบันทั้งในประเทศอเมริกา ยุโรป ญี่ปุ่น หรือหลายประเทศทั่วโลก มีแนวโน้มที่จะให้ความสำคัญกับการคิดทางคณิตศาสตร์ ความเข้าใจเชิงความคิดรวบยอด การแก้ปัญหาที่ซับซ้อน และการสื่อสารมากกว่าการคำนวณแบบซ้ำๆ หรือการจดจำข้อเท็จจริงต่างๆ ในขณะเดียวกันในช่วง 30 ปีที่ผ่านมา ท่ามกลางกระแสการปฏิรูปคณิตศาสตร์ศึกษา นักคณิตศาสตร์ศึกษาทั่วโลกต่างก็เริ่มให้ความสนใจกับการตั้งคำถามใหม่ทั้งในเรื่องของวัตถุประสงค์หรือเป้าหมายและวิธีการต่างๆ สำหรับการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียนจากมุมมองเชิงทฤษฎีใหม่ที่หลากหลายมากขึ้นด้วยเช่นกัน (Cobb, Wood & Yackel, 1991)

Tall (2004) ได้พัฒนาคำอธิบายของการเติบโตในวิชาคณิตศาสตร์ของแต่ละคนในทุกช่วงวัย จนได้ค้นพบว่าแต่ละคนมีวิธีการดำเนินการในแนวทางที่แตกต่างกันตั้งแต่ระดับกายภาพ ระดับการดำเนินการทางสมอง รวมถึงการกระทำและการใช้ความรู้สึกในปริภูมิและความรู้สึกด้านอื่นๆ จนถึงการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ดำเนินการในฐานที่เป็นกระบวนการ (Process) และความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการ (Procept) ทั้งนี้ Tall ยังได้อธิบายถึงแนวคิดสำคัญที่เกี่ยวกับการคิดทางคณิตศาสตร์ได้แก่ โลกทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอธิบายถึงพัฒนาการทางการคิดทางคณิตศาสตร์ โดยแบ่งโลกทางคณิตศาสตร์ไว้ 3 โลก ได้แก่ 1) โลกกายภาพ (embodied) เป็นพื้นที่แรกของพัฒนาการทางการคิดทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนามาจากการพิจารณาคุณสมบัติของวัตถุกายภาพ และพัฒนาไปสู่การใช้ภาษาในการอธิบาย เริ่มจากการสัมผัส การหยิบ การจับ และการจินตนาการถึงวัตถุสู่ค่านิยาม 2) โลกสัญลักษณ์ (symbolic) เป็นโลกของสัญลักษณ์ที่ใช้ในการคำนวณ โดยใช้สัญลักษณ์เพื่อแสดงแทนการพัฒนาจากกระบวนการคำนวณไปสู่ความคิดรวบยอด 3) โลกสัจพจน์เชิงนามธรรม (formal) คือโลกที่อาศัยคุณสมบัติที่แสดงในค่านิยามในฐานะของสัจพจน์สู่โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่มีเฉพาะตัวอย่างมีแบบแผน ไม่อิงอยู่กับวัตถุและประสบการณ์

Tall (2006) กล่าวถึงขั้นตอนของการดำเนินการแก้ปัญหาเลขคณิตสู่ความคิดรวบยอดเรียกว่า ช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบีบอัดที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์ ซึ่งเกิดขึ้นภายใต้การดำเนินการของส่วนที่ผสมผสานของโลกกายภาพและโลกสัญลักษณ์ ตั้งแต่เริ่มต้นคณิตศาสตร์ในโรงเรียนอาศัยโลกกายภาพโยการให้ความหมายเฉพาะในหลากหลายบริบทที่ใช้โลกสัญลักษณ์ในเลขคณิตและพีชคณิต และแสดงให้เห็นถึงโลกกายภาพพัฒนาไปสู่โลกสัญลักษณ์ การใช้สัญลักษณ์เป็นการดำเนินการของแนวคิดจากวิธีการไปสู่กระบวนการและความคิดรวบยอด ได้เกิดควบคู่กับโลกกายภาพ โดยแบ่งออกเป็น 5 ขั้นตอนตามภาพ 2 ได้แก่ ขั้นที่ 1 ก่อนวิธีการ (Pre-Procedure) เป็นขั้นที่ไม่มีวิธีการแก้ปัญหา หรือส่วนของวิธีการแก้ปัญหาใด ขั้นที่ 2 หนึ่งวิธีการ (Procedure) เป็นขั้นที่ใช้วิธีการเดียวซ้ำๆ เป็นประจำในการดำเนินการแก้ปัญหา ขั้นที่ 3 หลายวิธีการ (Multi-Procedure) เป็นขั้นที่เลือกใช้วิธีการหลากหลายในการแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ ขั้นที่ 4 กระบวนการ (Process) เป็นขั้นที่ยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาและเลือกวิธีการที่

เหมาะสม และขั้นที่ 5 ความคิดรวบยอดของกระบวนการ (Procept) เป็นขั้นที่สามารถคิดอย่างเป็นคณิตศาสตร์ด้วยสัญลักษณ์



รูปที่ 1 แสดงช่วงทางของผลลัพธ์จากการบีบอัดที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์ (Tall, 2006)  
(ปรับจาก Gray, Pitta, Pinto & Tall, 1999, p.121)

การเปลี่ยนผ่านเกิดขึ้นภายใต้โลกกายภาพและโลกสัญลักษณ์ที่มีการ “ผสมผสาน” (Blending) กันอยู่โดยอาศัยช่วงเวลาในปฏิสัมพันธ์และรับรู้คุณสมบัติของวัตถุในโลกกายภาพ ในขณะที่โลกสัญลักษณ์จะเกิดการกระทำบนวัตถุเช่น การชี้ การนับ การรวม การแยก และทำให้เป็นสัญลักษณ์เพื่อแสดงให้ผู้อื่นเข้าใจแนวคิดของตนเองต่อไป นอกจากนี้การผสมผสานโลกกายภาพและโลกสัญลักษณ์เป็นการสร้างแนวคิดจากการกระทำที่เปลี่ยนแปลงบนวัตถุกายภาพ เพื่อให้เห็นถึงผลของการคำนวณอย่างถูกต้องและการดำเนินการเพื่อทำเป็นสัญลักษณ์ด้วยการผสมผสานโลกกายภาพและโลกสัญลักษณ์ที่สอดคล้องกับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนที่นำเสนอโลกกายภาพและโลกสัญลักษณ์ในการดำเนินการจัดการเรียนการสอน

ในปัจจุบันเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวางว่าแนวทางการสอนที่จะทำให้ให้นักเรียนเกิดการพัฒนาคณิตศาสตร์นั้นจำเป็นต้องอาศัยการวางรากฐานจากการแก้ปัญหา วิธีการแบบเปิด (Open Approach) เป็นแนวทางการสอนการแก้ปัญหา (Problem-Solving Approach) ลักษณะหนึ่งที่ Inprasitha (2010) ได้บูรณาการเอาวิธีการแบบเปิดในฐานะที่เป็นแนวทางการสอนเข้าไปในกระบวนการการศึกษาชั้นเรียน(Lesson Study) เพื่อให้ครูได้ร่วมมือกันในการสร้างหน่วยการเรียนรู้ ออกแบบปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาเพื่อสอนนักเรียนให้สามารถสร้างเครื่องมือในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ด้วยและ/เพื่อตัวของนักเรียน (Isoda, 2010) ในการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดนั้นนักเรียนจะมีอิสระในการสร้างสัญลักษณ์และความหมายของสิ่งที่เรียนรู้ทั้งในแง่ของจำนวนและการดำเนินการ ซึ่งเป็นวิธีการสอนที่ทำให้เรียนรู้วิธีการเรียนรู้ (Learning how to learn) ทั้งนี้วิธีการแบบเปิดมีขั้นตอนการสอนประกอบด้วย 4 ขั้นตอนดังต่อไปนี้คือ 1) การนำเสนอปัญหาปลายเปิด 2) การเรียนรู้ด้วยตนเอง 3) การอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียน และ 4) การสรุปโดยการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน

ชั้นคณิตศาสตร์ที่ใช้วัตรกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด พัฒนาแนวทางการสอนเพื่อเปิดโอกาสค้นพบคณิตศาสตร์ และเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยและเพื่อตัวของนักเรียน โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเรียนรู้การบวกสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาเป็นครั้งแรก ถือว่าเป็นเรื่องที่สำคัญที่นักวิจัยควรทำการศึกษาเส้นทางพัฒนาการของกระบวนการเรียนรู้การคูณทั้งในแง่ของการสร้างความหมายและการดำเนินการของการบวกของนักเรียนผ่านกระบวนการความเป็นนามธรรม (Abstraction process) บนสามโลกทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะช่วยให้ครูสามารถพัฒนาความสามารถในการดำเนินการด้วยการบวกสำหรับนักเรียน เพื่อที่จะเป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการตัวอื่นๆ หรือแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญๆ ในระดับชั้นที่สูงขึ้นไป ผู้วิจัยจึงได้ทำการวิจัยในเรื่องนี้โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิเคราะห์กระบวนการเรียนรู้เรื่องการบวกผ่านกระบวนการความเป็นนามธรรมจากโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่ใช้วัตรกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด การวิจัยนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาความเข้าใจในการคิดเกี่ยวกับการบวกของนักเรียนและแนวทางการสอนตามแนวทางของวิธีการแบบเปิดที่ลึกซึ้งยิ่งขึ้นไปด้วย

## วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์กระบวนการเรียนรู้เรื่องการบวกผ่านกระบวนการความเป็นนามธรรมจากโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนด้วยวิธีการแบบเปิด

## นิยามศัพท์เฉพาะ

1) วิธีการแบบเปิด (Open Approach) หมายถึง แนวทางการสอนการแก้ปัญหา ที่เน้นการพัฒนาวิธีการเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน ในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ในบทเรียนหนึ่งๆ ประกอบด้วยขั้นตอนการสอน 4 ขั้นตอนได้แก่ การนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด การเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน การอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียน และ การสรุปโดยการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน

2) การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด (Lesson Study and Open Approach) หมายถึง วัตรกรรมการพัฒนาวิชาชีพครูคณิตศาสตร์แนวใหม่ที่นำมาใช้ในประเทศไทย โดยเป็นวัตรกรรมการศึกษาที่บูรณาการวิธีการแบบเปิดในฐานะแนวทางการสอนการแก้ปัญหาเข้าไปในกระบวนการของการศึกษาชั้นเรียน โดยเน้นการทำงานร่วมกันอย่างต่อเนื่องของครูในการพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยวิธีการแบบเปิดในวงจรการศึกษาชั้นเรียน 3 วงจร ได้แก่ การร่วมสร้างแผนจัดการเรียนรู้ การร่วมสังเกตชั้นเรียน และการร่วมสะท้อนผลบทเรียน

3) สามโลกทางคณิตศาสตร์ (Three world of mathematics) หมายถึง คำอธิบายเกี่ยวกับพัฒนาการทางการคิดทางคณิตศาสตร์ตามกรอบแนวคิดในการคิดทางคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีของ Gray&Tall (2002) แบ่งได้เป็น 3 โลก ได้แก่ โลกกายภาพ (Embodied) คือการรับรู้คุณสมบัติและมีปฏิสัมพันธ์กับวัตถุ การสัมผัสถึงประสบการณ์ในชีวิตประจำวัน และการใช้สื่อสิ่งรูปธรรม โลกสัญลักษณ์ (Symbolic) คือ การกระทำบนวัตถุตลอดจนสร้างเป็นสัญลักษณ์เพื่อสร้างความคิดรวบยอด และพัฒนาไปสู่โครงสร้างทางสัญลักษณ์ และ โลกสัจพจน์เชิงนามธรรม (Formal) หมายถึง การคิดอย่างเป็นแบบแผนโดยไม่อิงกับวัตถุ อาศัยสมบัติจากนิยาม อนิยาม ทฤษฎี และสัจพจน์

4) กระบวนการเป็นนามธรรม (Abstraction Process) หมายถึง กระบวนการที่แสดงถึงพัฒนาการทางการคิดทางคณิตศาสตร์จากโลกกายภาพไปสู่โลกสัญลักษณ์แสดงด้วยวิธีการแก้ปัญหานักเรียนในชั้นเรียนตามช่วงห่างของผลลัพธ์จากการปิดที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์

## วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเชิงคุณภาพ ผู้วิจัยใช้ระเบียบวิธีใช้ระเบียบวิธีวิจัยการทดลองเชิงการสอน (Teaching Experiment) (Cobb et al., 2003) ในการศึกษาเป็นรายกรณี (Case Study Approach) ในการดำเนินการวิจัย และเป็นส่วนหนึ่งของโครงการวิจัยกระบวนการเรียนรู้วิธีการสอนของนักศึกษาฝึกประสบการณ์วิชาชีพครูในการพัฒนาการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนผ่านกระบวนการพัฒนาวิชาชีพครูด้วยนวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด มีรายละเอียดเกี่ยวกับระเบียบวิธีวิจัยดังนี้

### กลุ่มเป้าหมาย

ในงานวิจัยนี้ กลุ่มเป้าหมายได้แก่ ทีมการศึกษาชั้นเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนชุมชนบ้านบวกครกน้อย จ.เชียงใหม่ ปีการศึกษา 2558 โรงเรียนดังกล่าวนี้เป็นโรงเรียนที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดในการพัฒนาวิชาชีพครู ทีมการศึกษาชั้นเรียนดังกล่าวนี้ประกอบด้วย ครูผู้สอน ซึ่งเป็นนักศึกษาปฏิบัติงานวิชาชีพครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ครูผู้สังเกต 6 คน ได้แก่ ครูประจำชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 และ 2 นักศึกษาปฏิบัติวิชาชีพครูสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ที่สอนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ทีมนักวิจัย และผู้อำนวยการโรงเรียน

### การเก็บรวบรวมข้อมูล และการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลตลอดกระบวนการศึกษาชั้นเรียนในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ที่สอนเรื่อง การบวก 2 (ผลลัพธ์ไม่เกิน 20) โดยเลือกนำมาวิเคราะห์เป็นกรณีศึกษา จำนวน 2 บทเรียน ด้วยการวิเคราะห์แผนการจัดการเรียนรู้ การบันทึกวีดิทัศน์ชั้นเรียน การบันทึกภาพนิ่งชั้นเรียนและภาพผลงานนักเรียน ผู้วิจัยวิเคราะห์ชั้นเรียนด้วยการวิเคราะห์โพโตคอลร่วมกับวิเคราะห์วีดิทัศน์ตามทฤษฎีสากลทางคณิตศาสตร์ของ Tall (2004) และวิธีการแบบเปิด (Open Approach) ของ Inprasitha (2010) ข้อมูลวิจัยถูกนำเสนอด้วยการพรรณนาวิเคราะห์ตามกระบวนการของการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

## ผลการวิจัย

### กิจกรรม“สนามเด็กเล่น” (9+4)

กิจกรรมนี้มีเป้าหมายให้นักเรียนได้เริ่มเรียนรู้วิธีการบวกที่มีผลลัพธ์มากกว่า 10 จากสถานการณ์ 9+4 โดยมีเป้าหมายที่เน้นให้นักเรียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาวีธีต่างๆ เช่น การนับต่อ (Count on) การนับทั้งหมด (Count all) และการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบ (Decomposing for make tens) รวมถึงเขียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาลงในใบกิจกรรม

#### 1.การนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด

ครูได้ให้นักเรียนช่วยกันแต่งโจทย์ปัญหาจากภาพที่ติดบนกระดานและเมื่อนักเรียนได้เริ่มสร้างเรื่องราวจากภาพจะช่วยให้เด็กได้เชื่อมโยงเข้าถึงโลกทางกายภาพมากขึ้น จากนั้นครูได้ให้นักเรียนออกมาจัดเรียงแถวเด็กที่อยู่ในกระบะทรายและกระดานสี่เหลี่ยมให้เป็นแถวเดียว ในขั้นตอนนี้นักเรียนหลายคนเริ่มตอบได้ว่ามีจำนวนเด็กทั้งหมด 13 คน จากการนับตามในขณะที่เพื่อนออกมาหยิบภาพของเด็กแต่ละคนออกไปเรียงแถว ครูให้นักเรียนบอกวิธีการเขียนประโยคสัญลักษณ์จากสถานการณ์ ซึ่งนักเรียนได้ใช้ภาพและการเรียงแถวเด็กแต่ละคนเพื่อเชื่อมโยงไปสู่การเขียนประโยคสัญลักษณ์ กล่าวคือนักเรียนสังเกตจากภาพเด็กที่ถูกเรียงแถวเป็น 9 คน และ 4 คน แล้วสามารถตอบได้ว่าประโยคสัญลักษณ์ของสถานการณ์นี้คือ  $9+4$  ในขณะเดียวกันมีนักเรียนหลายคนสามารถตอบได้อย่างถูกต้องทั้งประโยคสัญลักษณ์และคำตอบของสถานการณ์ จากการที่นักเรียนออกมาจัดแถวเด็กโดยใช้สื่อรูปธรรมเป็นภาพเด็กแต่ละคน ให้นักเรียนออกมาจัดแถวให้เด็ก นักเรียนสามารถตอบได้ตั้งแต่แรกด้วยวิธีการชี้และนับเด็กที่อยู่ในภาพทีละคนจนครบและได้คำตอบว่าเป็น 13 คน ซึ่งถือเป็นวิธีการแก้ปัญหาด้วยการใช้ Met-before เข้ามาช่วย

## 2.การเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน

ในขั้นตอนนี้นักเรียนได้ดำเนินการขยับจากขั้นที่1 ก่อนวิธีการ ที่ไม่มีวิธีการแก้ปัญหาหรือส่วนของวิธีการแก้ปัญหาใด ไปสู่แก้ปัญหาอย่างเป็นขั้นตอนตามลำดับในขั้นที่2 หนึ่งวิธีการ จากการที่ครูให้นักเรียนได้ทำกิจกรรมและใบกิจกรรมโดยการที่ครูแจกบล็อกไม้และรางสิบ เพื่อเป็นสื่อช่วยให้นักเรียนในการแก้ปัญหา แสดงได้โดยการที่นักเรียนเริ่มจากการตรวจสอบจำนวนบล็อกไม้กับภาพจากสถานการณ์ด้วยการเปรียบเทียบแบบหนึ่งต่อหนึ่งก่อนที่จะใช้จำนวนบล็อกไม้ที่ตรวจสอบแล้วเพื่อดำเนินการแก้ปัญหา  $9+4$  ซึ่งนักเรียนเขียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยบล็อกไม้และรางสิบ ได้ผลงานคือภาพที่อยู่ในส่วนที่



ผสมผสานระหว่างโลกกายภาพและโลกสัญลักษณ์ ขณะเดียวกันนักเรียนใช้สัญลักษณ์เป็นลูกศร(←)เพื่อแสดงความหมายของการบวกที่ได้เรียนรู้จากบทเรียนเรื่อง “การบวก(1)” และการแสดงคำตอบจากการบวกที่มีค่ามากกว่า 10 ด้วยตารางหลักเลข และบล็อกไม้ในรางสิบจากการเรียนรู้เรื่อง “จำนวนที่มากกว่า 10”

รูปที่ 1 แสดงการตรวจสอบบล็อกไม้กับภาพจากสถานการณ์

## 3.การเปรียบเทียบและอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน

ในขั้นนี้ช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบีบอัดที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์ได้เริ่มดำเนินไปในขั้นที่2 หนึ่งวิธีการ เนื่องจากนักเรียนการนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่1 ได้ใช้ความรู้ที่เรียนรู้มาแล้วในเรื่องการบวก(1) ที่ใช้เขียนแสดงด้วยบล็อกไม้และลูกศร แต่ในครั้งนี้นักเรียนใช้ลูกศรที่แสดงถึงการย้ายบล็อกไม้จากด้านที่มีอยู่ 4 บล็อกออกมา 1 บล็อก ไปใส่ให้ด้านที่มีบล็อกไม้ที่มีจำนวน 9 ให้เต็ม 10 ซึ่งเป็นการใช้สัญลักษณ์เพื่อแสดงแทนการดำเนินการ นอกจากนี้นักเรียนยังใช้ลูกศรแสดงที่มาของจำนวน 13 ว่ามาจากบล็อกไม้ทั้งสองด้าน คือ 1 แทนบล็อกไม้ 10 และ 3 แทนบล็อกไม้ 3 จากโปรโทคอลในการอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 1 กับครูที่ใช้คำถามเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนอธิบายดังแสดงนี้

T : ตรงนี้คืออะไร...ตรงนี้ด้วย  
หยก : 9

T : แล้วยังไงต่อ  
 หยก : ย้าย (บล็อกไม้ที่ถูกลง)  
 T : แล้วยังไงต่อ  
 หยก : เป็น 10  
 T : กลายเป็น 10 กับอะไรนะ  
 หยก : 10 กับ 3 (ด้านที่มี 10 บล็อก กับ 3 บล็อก)  
 T : เป็นเท่าไร  
 หยก : 13

#### 4.การสรุปบทเรียน

ในขั้นนี้ครูสรุปเชื่อมโยงถึงวิธีการที่นักเรียนแต่ละคนใช้ในการแก้ปัญหาในครั้งนี้อย่างประกอบด้วย การวาดบล็อกไม้และลูกศรแสดงความหมายการบวก การเขียนคำตอบให้อยู่ในรูปของตารางหลักเลข นอกจากนี้ครูได้เน้นย้ำถึงวิธีการแก้ปัญหานักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 1 ที่แยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบช่วยให้ดำเนินการแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น ในกิจกรรมนี้ช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบิบัติที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์ ดำเนินเปลี่ยนผ่านจาก **ขั้นที่ 1 ก่อนวิธีการ ไปสู่ขั้นที่ 2 หนึ่งวิธีการ** กล่าวคือในกิจกรรมนี้เมื่อเริ่มต้นกิจกรรมนักเรียนได้ใช้วิธีการหาคำตอบด้วยการชี้และนับจากภาพที่มองเห็นเพื่อ จากนั้นนักเรียนใช้บล็อกไม้แทนจำนวนเด็กในการดำเนินการแก้ปัญหาด้วยบล็อกไม้และรางสิบ ด้วยความรู้ที่เคยเรียนรู้มาแล้วอย่างเป็นขั้นตอนตามประสบการณ์ที่เคยเขียนสัญลักษณ์แสดงแทนการบวกด้วยลูกศร และแสดงผลลัพธ์ด้วยตารางหลักเลขลงในใบกิจกรรม

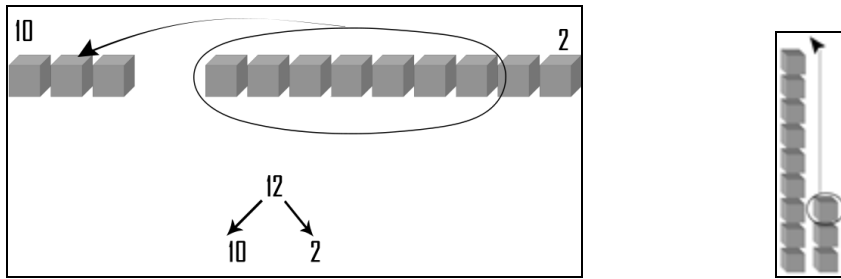
#### กิจกรรม “มีไข่กี่ฟองนะ” (3+9)

กิจกรรมนี้มีเป้าหมายให้นักเรียนได้เรียนรู้วิธีการบวกที่มีผลลัพธ์มากกว่า 10 จากสถานการณ์ 3+9 โดยมีเป้าหมายที่เน้นให้นักเรียนใช้วิธีการแก้ปัญหาคำตอบด้วยการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบ (Decomposing for make tens) ด้วยการทบทวนคำพูดสำคัญที่เกิดขึ้นในกิจกรรมที่ผ่านมาคือ “แยก....เป็น....” โดยครูจะห้ามให้นักเรียนนับนิ้ว

##### 1.การนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด

กิจกรรมนี้ครูได้ดำเนินการคล้ายกับกิจกรรมที่ผ่านมา แต่ในกิจกรรมนี้ครูตัดเครื่องมือของนักเรียนออกไปคือไม่ให้นักเรียนนับนิ้วเพื่อให้ฝึกฝนให้นักเรียนได้ดำเนินการแก้ปัญหายูนิโคสัญลักษณ์มากขึ้น

**2.การเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน** ในขั้นนี้นักเรียนยังคงแสดงวิธีการใช้ลูกศรโยงจากไข่ 1 ฟองจากด้านที่มี 3 ฟองไปหาด้านที่มี 9 ฟองให้เต็มแผงเป็น 10 ฟองในใบกิจกรรม นักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 2 แสดงวิธีการดำเนินการโดยการวางบล็อกไม้จากกลุ่มบล็อกไม้ 3 บล็อกออกมา 1 บล็อกแล้วใช้ลูกศรโยงไปเติมแถวของบล็อกไม้ที่มี 9 บล็อกเพื่อทำให้เป็นสิบ หมายความว่านักเรียนแยกจำนวน 3 ออกเป็น 2 กับ 1 แล้วเอา 1 ไปเพิ่มให้ 9 เป็น 10 และ เอา 10 มารวมกับ 2 เป็น 12 คือคำตอบ ในขณะที่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 1 แสดงวิธีการดำเนินการที่ต่างไปจากนักเรียนกลุ่มอื่นคือการใช้การย้ายบล็อกไม้ 7 บล็อก จากด้านที่มี 9 บล็อก เพื่อทำให้ด้านที่มี 3 บล็อก กลายเป็น 10 บล็อก และเขียนตัวเลขกำกับว่ามี 10 และ 2 นอกจากนี้ยังโยงเส้นแยกจำนวน 12 ให้เห็นว่ามาจาก 10 และ 2 จากการดำเนินการดังกล่าวช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบิบัติที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์ของนักเรียนในขั้นนี้อยู่ใน **ขั้นที่ 3 หลายวิธีการ**



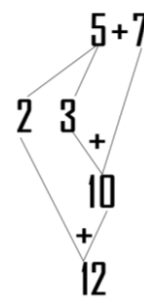
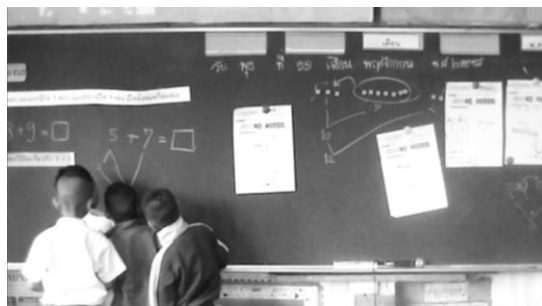
รูปที่ 2 (ซ้าย) แสดงผลงานนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 1 ที่ใช้วิธีการแยกจำนวน 7 ออกจาก 9 เพื่อให้ 3 กลายเป็น 10

(ขวา) แสดงผลงานนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 2 ที่ใช้สูตรแสดงการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบ

กล่าวคือนักเรียนเริ่มใช้วิธีในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เพราะนักเรียนสามารถเลือกได้ว่าจะทำการแยกจำนวน 3 หรือ 9 ออกเพื่อให้อีกจำนวนหนึ่งกลายเป็น 10

### 3.การอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียน

ประเด็นในการอภิปรายและเปรียบเทียบในวันนี้คือระหว่างวิธีการทั่วไปของนักเรียนที่กลุ่มตัวอย่างที่ 1 และวิธีการทั่วไปที่นักเรียนทำ โดยครูขยายวิธีการของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 1 ที่ใช้วิธีการแยกจำนวน 9 และวิธีการทั่วไปของนักเรียนคนอื่นๆในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแยก 3 การดำเนินการแก้ปัญหาเลขคณิตในช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบิบัติที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์ของนักเรียนในชั้นนี้กำลังเคลื่อนที่เข้าไปอยู่ใน **ขั้นที่ 4 กระบวนการ** เป็นขั้นที่ยืดหยุ่นในการแก้ปัญหาและเลือกวิธีการที่เหมาะสมเป็นผลมาจากการที่นักเรียนได้เห็นแล้วว่าสามารถแยกจำนวนได้ทั้งจากตัวตั้ง 3 และตัวบวก 9 ซึ่งหากใช้วิธีการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบแล้วต่างก็ได้คำตอบเหมือนกัน กล่าวคือนักเรียนเรียนรู้ว่าในการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบนั้นสามารถทำได้หลายวิธี ซึ่งต่างก็ส่งผลให้คำตอบที่ถูกต้องเหมือนกัน ขณะเดียวกันการแสดงวิธีการด้วยไดอะแกรมจากการอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียนของกิจกรรมนี้ นักเรียนได้เห็นตัวอย่างของไดอะแกรมที่สมบูรณ์ และครูได้ร่วมกับนักเรียนในการอภิปรายเพื่อให้เกิดการเปลี่ยนรูปแบบของไดอะแกรมให้เข้าใจง่ายขึ้น



รูปที่ 3 แสดงการสรุปบทเรียนที่นักเรียนร่วมกันแก้ปัญหา  $5+7$  ด้วยไดอะแกรมที่ใช้วิธีการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบ

#### 4.การสรุปทเรียน

ในขั้นนี้นักเรียนได้ดำเนินการในช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบีบอัดเพื่อให้เกิดสัญลักษณ์ใน **ขั้นที่4 กระบวนการ** นักเรียนได้เลือกใช้วิธีการดำเนินการแก้ปัญหาด้วยโดะแกรมได้อย่างหลากหลายและตระหนักถึงการทำให้เป็นสิบ ก่อนด้วยการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบ แสดงได้โดยการที่ครูก็เริ่มใช้การโยงเส้นแสดงการจับคู่จำนวนในการดำเนินการบวกและเขียนตัวเลขประกอบแล้วให้นักเรียนพิจารณาเปรียบเทียบระหว่างการเขียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาที่นักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 1 ใช้การแยกจำนวน 9 ออกเป็น 7 กับ 2 และเอา 7 บวก 3 เป็น 10 แล้วนำ 10 มาบวก 2 เป็น 12 กับวิธีที่นักเรียนส่วนใหญ่ทำการแยกจำนวน 3 เป็น 2 กับ 1 แล้วนำ 1 มาให้ 9 เป็น 10 แล้วนำ 2 มาบวก 10 เป็น 12 ซึ่งนักเรียนตอบว่าวิธีที่นักเรียนส่วนใหญ่เลือกทำนั้นจะง่ายกว่า เนื่องจากแยกตัวเลขน้อยกว่า และ 9 มีค่าใกล้เคียง 10 มากกว่า จากนั้นครูและนักเรียนได้ร่วมกันอภิปรายถึงโดะแกรมไม่สมบูรณ์และเข้าใจยาก โดยครูร่วมกับนักเรียนในการแก้โดะแกรมให้ง่ายขึ้น

ความก้าวหน้าของนักเรียนจากกิจกรรมนี้คือ เมื่อครูกำหนดประโยคสัญลักษณ์ $5+7$  แล้วให้ตัวแทนนักเรียนออกมาช่วยกันเขียนแสดงวิธีการด้วยโดะแกรม ซึ่งนักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยโดะแกรมและใช้วิธีการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบในการดำเนินการแก้ปัญหา โดยนักเรียนช่วยกันแยกจำนวน 5 เป็น 2 กับ 3 แล้วเอา 3 มาบวก 7 เป็น 10 เอา 2 มาบวก 10 เป็น 12 และได้คำตอบที่ถูกต้อง ตลอดจนโดะแกรมที่สวยงามนอกจากนี้นักเรียนเริ่มเรียนรู้ความหมายและวิธีการใช้การโยงเส้นเพื่อแสดงการบวกในการแก้ปัญหา

#### กิจกรรม “บัตรการบวก”

กิจกรรมนี้เป็นกิจกรรมต่อเนื่องกัน เป็นกิจกรรมที่จะตรวจสอบความคิดรวบยอดของนักเรียนในเรื่องการบวก เริ่มด้วยการให้นักเรียนทายคำตอบจากบัตรการบวก เรียงบัตรการบวก และ หยิบบัตร จับคู่บัตรการบวก กิจกรรมนี้เป็นการทบทวนความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการบวกโดยนักเรียนจะได้ดำเนินการแก้ปัญหาจากบัตรการบวกในเวลาที่กำหนดและนักเรียนจะเลือกใช้วิธีการแก้ปัญหายังไงก็ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องและใช้เวลาให้น้อยที่สุด นักเรียนส่วนใหญ่ใช้การนับมือเพื่อการนับต่อในการดำเนินการ และเมื่อดำเนินกิจกรรมไปได้สักพักนักเรียนจะเริ่มเห็นว่าการนับมือนั้นแม้จะใช้เวลาที่เร็วแต่กลับได้คำตอบที่ไม่ถูกต้อง นักเรียนจึงไปหาสมุดและดินสอมาใช้ในการแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยโดะแกรม กิจกรรมนี้อยู่ใน **ขั้นที่ 3 หลายวิธีการ ขั้นที่4 กระบวนการ และขั้นที่5 ความคิดรวบยอดของกระบวนการ** จากการที่นักเรียนต้องแก้ปัญหาในเวลาที่กำหนดนักเรียนต้องเลือกใช้เครื่องมือที่หลากหลายและหาเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพและเลือกใช้การแก้ปัญหาด้วยโดะแกรมที่ใช้วิธีการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบอีกในการแก้ปัญหา

#### กิจกรรมที่ 12 “บวกหรือลบเอ่ย”

ก่อนมาถึงกิจกรรมนี้นักเรียนได้เรียนหน่วยการเรียนรู้เรื่อง “การลบ(2)” จำนวน 12 คาบ ซึ่งนักเรียนสามารถแก้ปัญหาคารลบด้วยโดะแกรมได้แล้ว ในกิจกรรมนี้มีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์สถานการณ์แล้วเขียนประโยคสัญลักษณ์ตลอดจนแสดงวิธีการแก้ปัญหาสถานการณ์ที่มีการดำเนินการ 2 ครั้ง ในกิจกรรมนี้มุ่งสังเกตว่านักเรียนจะใช้การคิดอย่างเป็นคณิตศาสตร์ด้วยสัญลักษณ์อย่างไรในการดำเนินการแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาดังกล่าว

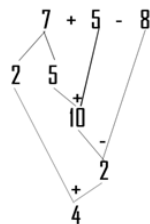
### 1.การนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด

ในขั้นนี้ครูทบทวนกิจกรรมที่ผ่านมาและนำเสนอสถานการณ์ปัญหาใหม่โดยที่ครูให้นักเรียนอ่านและทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาให้ตีก่อนเขียนประโยคสัญลักษณ์และดำเนินการแก้ปัญหา โดยสถานการณ์ปัญหาที่สนใจในกิจกรรมนี้คือ “มีเด็ก 7 คน เล่นอยู่บนกระเบทรายต่อมามีเด็กมาเพิ่มอีก 5 คน หลังจากนั้นเด็กกลับบ้านไป 8 คน เหลือเด็กที่กำลังอยู่ในกระเบทรายทั้งหมดกี่คน” ประโยคสัญลักษณ์คือ  $7+5-8$

### 2.การเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน

ในขั้นนี้นักเรียนสามารถวิเคราะห์จากสถานการณ์ได้และเขียนประโยคสัญลักษณ์ในแต่ละสถานการณ์ได้อย่างถูกต้อง และนักเรียนดำเนินการแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยโดอะแกรมโดยใช้ Met-befores แสดงด้วยโดอะแกรมและเขียนอธิบายโดอะแกรมของตัวเอง โดยนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 2 ใช้การแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยโดอะแกรมได้และเขียนอธิบายตามวิธีการเขียนโดอะแกรมว่า “แยก 7 เป็น 5 กับ 2 เอา 5 มาบวกกับ 5 เป็น 10เอา 10 มาลบกับ 8 เป็น 2 เอา 2 มาบวกกับ 2 เป็น 4” อย่างไรก็ตามนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 1 เกิดความสับสนแสดงในการเขียนแสดงวิธีการดำเนินการแก้ปัญหาด้วยโดอะแกรมและไม่สามารถเขียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยโดอะแกรมให้สมบูรณ์ได้ จากกิจกรรมในขั้นนี้เป็นในการดำเนินการในช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบีบอัดที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์ในขั้นที่ 5 **ความคิดรวบยอดของกระบวนการ** โดยนักเรียนใช้โดอะแกรมเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ในการเขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหาและให้ความสำคัญกับเครื่องมือและความคิดรวบยอดด้วยการใช้โดอะแกรมที่ใช้วิธีการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องแม้จะเป็นสถานการณ์ที่มีความยุ่งยากและแปลกใหม่ นักเรียนก็สามารถใช้ความคิดรวบยอดเรื่องการบวกและการลบมาใช้ในการแก้ปัญหาสถานการณ์ที่เป็นโจทย์ปัญหาการบวกลบระคนที่มีการดำเนินการสองครั้งที่ต่างกันได้

### 3.การอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียน



“แยก 7 เป็น 5 กับ 2

เอา 5 มาบวกกับ 5 เป็น 10

เอา 10 มาลบกับ 8 เป็น 2

เอา 2 มาบวกกับ 2 เป็น 4”

ภาพ 12 แสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยโดอะแกรมที่มีการดำเนินการ 2 ครั้ง

และเขียนคำอธิบายโดอะแกรมด้วยภาษาของตัวเอง

ในขั้นนี้ครูได้นำเสนอผลงานของนักเรียนและให้นักเรียนร่วมกันสังเกตโดอะแกรมของแต่ละกลุ่ม โดยในขั้นนี้ครูได้ให้นักเรียนสังเกตไปที่การดำเนินการของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 2 ซึ่งเป็นการดำเนินการที่พ้นช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบีบอัดที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์ในขั้นที่ 5 **ความคิดรวบยอดของกระบวนการ**ไปแล้ว กล่าวคือการทำนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ 2 สามารถแก้ปัญหการบวกลบระคนได้ ต้องใช้ความคิดรวบยอดในเรื่องการบวกและการลบมาคิดต่อและปรับให้ใช้ในการแก้ปัญหากับสถานการณ์ใหม่ๆ นอกจากนี้ยังสามารถเขียนอธิบายโดอะแกรมของตนเองซึ่งเป็นการอธิบายด้วยภาษาของนักเรียนได้

#### 4.การสรุปทเรียน

ในขั้นนี้ครูและนักเรียนได้ร่วมกันสรุปการแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยโดอะแกรมที่เหมาะสมโดยการให้ตัวแทนนักเรียนออกมาเขียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยโดอะแกรมที่ถูกต้องกับสถานการณ์ จากกิจกรรมนี้แสดงให้เห็นถึงการคิดอย่างเป็นคณิตศาสตร์ด้วยสัญลักษณ์ของนักเรียนที่ชัดเจนและพ้นช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบีบอัดที่มากขึ้นของสัญลักษณ์ในขั้นที่5 **ความคิดรวบยอดของกระบวนการ** กล่าวคือนักเรียนสามารถแสดงกระบวนการคิดอย่างเป็นคณิตศาสตร์ผ่านการเขียนแสดงแทนด้วยสัญลักษณ์คือ “โดอะแกรม” เมื่อนักเรียนได้พบเจอกับสถานการณ์ปัญหาใหม่ที่มีความยุ่งยากในการแก้ปัญหาและมีความแตกต่างจากสถานการณ์ปัญหาอื่นๆที่เคยพบเจอมาก่อนหน้านี้ แต่นักเรียนได้เลือกใช้โดอะแกรมเป็นเครื่องมือในการเขียนแสดงวิธีการดำเนินการแก้ปัญหาด้วยแนวคิดของตัวเองและสามารถเขียนอธิบายโดอะแกรมของตนเองด้วยภาษาของตัวเอง ซึ่งเป็นการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้ความคิดรวบยอดของกระบวนการเพื่อนำไปคิดต่อ แล้วถูกเปลี่ยนให้เป็นกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบของ **Met-befores** และเมื่อนักเรียนเจอสถานการณ์ปัญหาใหม่ที่มีความซับซ้อนมากขึ้นจะใช้วิธีการแก้ปัญหาด้วยความคิดรวบยอดนี้ เช่นเดียวกับในกิจกรรมแรกที่นักเรียนใช้การคิดทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบของ **Met-befores** ในเรื่องการบวกที่มีผลลัพธ์ไม่เกิน10 และจำนวนที่มากกว่า10 ร่วมกันในการแสดงวิธีคิดและแก้ปัญหาการบวกที่มีผลลัพธ์มากกว่า10

#### สรุปผลการวิจัย

ความก้าวหน้าเชิงการรู้ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในแต่ละกิจกรรมเคลื่อนที่จากโลกกายภาพมาสู่ส่วนที่ผสมผสานกันของโลกกายภาพและโลกสัญลักษณ์ และผ่านเข้าสู่โลกสัญลักษณ์อย่างเป็นลำดับ โดยในช่วงเวลาที่นักเรียนใช้เวลาในส่วนที่ผสมผสานกันครูต้องคอยสังเกตพฤติกรรมนักเรียนและสร้างเงื่อนไขกับนักเรียนด้วยการตัดเครื่องมืออย่างบล็อกไม้และรางสไลด์ออกไป เพื่อเป็นการผลักดันให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ให้อยู่ในโลกสัญลักษณ์มากขึ้น ในขณะที่เดียวกันการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจะดำเนินไปอย่างคู่ขนานพร้อมๆกันระหว่างโลกกายภาพและโลกสัญลักษณ์ กล่าวคือนักเรียนใช้วิธีการ นับจากบล็อกไม้และรางสไลด์ โดยที่บล็อกไม้และรางสไลด์อยู่ในส่วนของโลกกายภาพ แต่เมื่อนักเรียนนำมาเปรียบเทียบจำนวนบล็อกไม้กับภาพสถานการณ์ทำให้เข้าสู่ส่วนที่ผสมผสานกันระหว่างโลกกายภาพและสัญลักษณ์ และเมื่อนักเรียนเขียนวิธีการแก้ปัญหาเป็นบล็อกไม้ รางสไลด์ และลูกศร ซึ่งเป็นการคิดในโลกสัญลักษณ์ในช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบีบอัดที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์อยู่ในขั้นก่อนวิธีการ และขั้นหนึ่งวิธีการตามลำดับแต่เมื่อครูต้องการให้เด็กเกิดพัฒนาการทางการคิดที่เป็นสัญลักษณ์ในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ จึงสร้างข้อตกลงกับนักเรียนด้วยการห้ามไม่ให้นักเรียนใช้วิธีการนับนิ้วเพื่อนำมาใช้บล็อกไม้และรางสไลด์ในการแก้ปัญหา ขณะเดียวกันเมื่อนักเรียนใช้บล็อกไม้และรางสไลด์แก้ปัญหาแล้วก็จะสามารถเขียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาในรูปแบบของบล็อกไม้และรางสไลด์ได้ และเมื่อนักเรียนเริ่มคุ้นเคยกับการแก้ปัญหาด้วยบล็อกไม้และรางสไลด์แล้ว ครูได้มุ่งเน้นให้นักเรียนมีพัฒนาการด้านภาษาในการอธิบายวิธีการแก้ปัญหาของตนเองให้คนอื่นเข้าใจ ครูจึงให้คำแนะนำว่าเมื่อเขียนเฉพาะบล็อกไม้และลูกศรเพียงอย่างเดียว จะทำให้เราต้องกลับมานับจำนวนบล็อกไม้ว่ามีอยู่เท่าไร ครูจึงได้ร่วมกันอภิปรายว่าจะทำอย่างไรให้คนอื่นเข้าใจวิธีการแก้ปัญหาของตัวเองได้เร็วขึ้นและผลที่ได้คือการเขียนตัวเลขกำกับไว้ จากนั้นครูได้ตัดบล็อกไม้และรางสไลด์ออกไปและให้นักเรียนสนใจถึงวิธีการแก้ปัญหาด้วยการวาดภาพบล็อกไม้และลูกศรที่มีตัวเลขกำกับ ทำให้นักเรียนได้เกิดกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ในโลกสัญลักษณ์มากขึ้น จากส่วนนี้ทำให้นักเรียน

เริ่มใช้ลูกศรแสดงความหมายใหม่ จากเดิมที่เป็นความหมายของการ “รวมกัน” แต่ในครั้งนี้นักเรียนใช้ลูกศรเพื่อแสดงความหมายของการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบ เมื่อนักเรียนเขียนบล็อกไม้ ลูกศร และตัวเลขกำกับแล้ว ครูได้ร่วมกันอภิปรายถึงวิธีการเขียนแสดงวิธีการแก้ปัญหานักเรียนว่าถ้าเราเลือกเขียนเฉพาะตัวเลข จะยังเข้าใจวิธีการแก้ปัญหของคนอื่นหรือไม่ แล้วร่วมกันสรุปและเรียกวิธีการนี้ว่า “โดอะแกรม” จากนั้นนักเรียนจะเข้าสู่โลกสัญลักษณ์ซึ่งอยู่ในขั้นหลายวิธีการ และเมื่อนักเรียนแสดงวิธีการแก้ปัญหที่หลากหลายด้วยโดอะแกรมซึ่งอยู่ในขั้นกระบวนการ และเมื่อนักเรียนคุ้นเคยกับโดอะแกรมแล้วจะเข้าสู่ขั้นที่ 5 และเมื่อนักเรียนผ่านขั้นความคิดรวบยอดของกระบวนการ แล้วจะสามารถอธิบายวิธีการแก้ปัญหของตัวเองและสามารถคิดย้อนกลับอีกทั้งสามารถใช้โดอะแกรมกับการดำเนินการอื่นอย่าง การลบ ตลอดจนโจทย์ปัญหาการบวกลบระคนนักเรียนก็สามารถที่จะแสดงวิธีการแก้ปัญหด้วยโดอะแกรมได้เช่นกัน

## อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

### อภิปรายผลการวิจัย

ในประเด็นการอภิปรายผลการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำเสนอประเด็นในการอภิปรายไว้ 3 ประเด็น ดังนี้

1) ลักษณะของกระบวนการเปลี่ยนผ่านจากโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์เรื่องการบวก ในชั้นเรียนที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาขั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดตามช่วงห่างของผลลัพธ์ที่เกิดจากการบีบอัดที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์

ช่วงเวลาในการเปลี่ยนผ่านจากโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์ของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาขั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดดำเนินไปตามช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบีบอัดที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์ (Tall, 2006) ตามลำดับขั้น เริ่มต้นที่ขั้นก่อนวิธีการที่มีความซับซ้อนของกระบวนการคิดในโลกกายภาพน้อยไปสู่ขั้นหนึ่งวิธีการ และขั้นหลายวิธีการที่มีความซับซ้อนมากขึ้นในส่วนที่ผสมผสานกันระหว่างโลกกายภาพและโลกสัญลักษณ์ เมื่อนักเรียนได้ดำเนินการอยู่ในขั้นหลายวิธีการ ตามแนวคิดของ Vygotsky ครูต้องทำหน้าที่ในการอำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ใน “Zone of Proximal Development” ที่ต้องคอยให้คำแนะนำ (Scaffolding) กับนักเรียนตามรูปแบบของการดำเนินการสอนด้วยวิธีการแบบเปิด โดยเฉพาะในขั้นการอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียนที่ครูจะต้องชี้แนะให้นักเรียนเห็นถึงวิธีการแก้ปัญหที่อยู่ในโลกสัญลักษณ์ซึ่งเป็นแนวทางไปสู่ความคิดรวบยอดด้วยการกำหนดไมให้นักเรียนนับนิ้วในการทำกิจกรรม รวมถึงการสร้างข้อตกลงไม่ให้ใช้บล็อกไม้และรางสิบในการทำกิจกรรมเพื่อให้นักเรียนใช้วิธีการแก้ปัญหที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์มากขึ้น นอกจากนี้ครูยังต้องทำหน้าที่กระตุ้นให้นักเรียนเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหของตนเองและผู้อื่นเพื่อเรียนรู้จากวิธีการแก้ปัญหของผู้อื่นซึ่งจะให้นักเรียนสามารถเข้าสู่ขั้นกระบวนการ หากใช้เวลาในขั้นกระบวนการน้อยเกินไปอาจทำให้นักเรียนพลาดโอกาสในการเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหที่มีประสิทธิภาพสำหรับตัวเองได้ ดังนั้นจึงควรใช้เวลาในขั้นกระบวนการไม่มากจนเกินไปเพราะขั้นที่มีความยืดหยุ่นในการเลือกวิธีการแก้ปัญหที่หลากหลายอาจทำให้นักเรียนเกิดความสับสนในการเลือกวิธีการแก้ปัญหที่มีประสิทธิภาพไป ซึ่งจะทำให้นักเรียนเกิดความลำบากในการเคลื่อนไปสู่ขั้นความคิดรวบยอดของกระบวนการได้อย่างไรก็ตามจากผลการวิจัยนี้เมื่อนักเรียนได้ผ่านขั้นความคิดรวบยอดของกระบวนการแล้วนักเรียนจะสามารถคิดย้อนกลับจากโลกสัญลักษณ์ไปสู่โลกกายภาพได้

กระบวนการเปลี่ยนผ่านของโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์ของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้วัตรกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดได้ดำเนินการไปพร้อมกันระหว่างโลกกายภาพและโลกสัญลักษณ์ โดยที่นักเรียนจะมีปฏิสัมพันธ์กับสื่อในชั้นเรียนนำเสนอสถานการณ์ปัญหาแล้วใช้วิธีการแก้ปัญหาจากสื่อที่ครูมีให้และกลับมาบันทึกวิธีการแก้ปัญหาของตัวเองลงในใบกิจกรรมโดยผลงานที่ได้ในช่วงแรกจะเป็นสัญลักษณ์เชิงภาพ แล้วจึงค่อยๆเปลี่ยนมาเป็นสัญลักษณ์และวิธีการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบของ “ไดอะแกรมที่ใช้วิธีการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบ” ซึ่งสอดคล้องกับนิศรา สุทธิสังข์ (2556)

## 2) การเรียนรู้ระยะยาวและกระบวนการเปลี่ยนผ่านจากโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์

กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เปลี่ยนไปอาศัยปัจจัยหลายอย่างในการพัฒนา สิ่งที่ทำเป็นต่อการพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียนในวัยนี้คือลำดับขั้นในการเรียนรู้ที่ควรสอดคล้องกับวัยของนักเรียน ชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วัตรกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดเป็นชั้นเรียนที่ใช้เนื้อหาในการจัดการเรียนรู้จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้ในโครงการพัฒนาวิชาชีพครูคณิตศาสตร์ด้วยวัตรกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด มีลำดับขั้นในการนำเสนอเนื้อหาเริ่มต้นบทเรียนจากโลกกายภาพ จากนั้นจึงค่อยๆเปลี่ยนเป็นสัญลักษณ์เพื่อให้นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหา ในขณะที่การจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิดช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้และแก้ปัญหาด้วยตนเอง ตลอดจนเรียนรู้ร่วมกันกับเพื่อนในชั้นเรียน ในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ได้เชื่อมโยงความรู้ที่นักเรียนได้เรียนรู้มาแล้ว (Met-befores) ให้เกิดขึ้นในชั้นเรียนนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด เพื่อให้นักเรียนได้ใช้พัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ไปพร้อมๆกับการเรียนรู้ระยะยาวของการคิดทางคณิตศาสตร์สอดคล้องกับ Tall and Isoda (2007) ในการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนควรความรู้จากสิ่งที่เรียนรู้มาแล้ว (Met-befores) ที่มีความสอดคล้องกันเป็นตัวดำเนินการในการพัฒนาและเรียนรู้ในเรื่องใหม่ที่มีความสอดคล้องกัน ดังที่นักเรียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยการใช้ความรู้เรื่องการแยกจำนวน (Decomposing) มาพัฒนาให้กลายเป็นการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบ (Decomposing for make tens) ร่วมกับความรู้เดิมเรื่องการใช้วงที่ใช้ลูกศรแสดงถึงความหมายการบวกและเปลี่ยนมาเป็นการโยงเส้นจับคู่แสดงการบวก หรือที่เรียกว่า “ไดอะแกรม” (Diagram) เมื่อนักเรียนผ่านช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบิบัติที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์แล้วได้ ความคิดรวบยอดของกระบวนการจะถูกเปลี่ยนให้กลายเป็นความรู้ที่ได้เรียนรู้มาแล้ว (Met-befores) และเมื่อนักเรียนเจอสถานการณ์ปัญหาการบวกลบระคนที่มีการดำเนินการสองครั้ง นักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้ปัญหาโดยอาศัยความคิดรวบยอดเรื่องการบวก และความคิดรวบยอดเรื่องการลบมาช่วยในการแสดงวิธีการแก้ปัญหาและแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยไดอะแกรมที่ใช้วิธีการแยกจำนวนเพื่อทำให้เป็นสิบ

## 3) เนื้อหาในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์และกระบวนการเปลี่ยนผ่านจากโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์

เนื้อหาในหนังสือเรียนมีส่วนสำคัญที่ช่วยให้กระบวนการเปลี่ยนผ่านจากโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์ดำเนินไปได้อย่างเป็นขั้นตอน จากที่ได้วิเคราะห์จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้ในโครงการพัฒนาวิชาชีพครูคณิตศาสตร์ด้วยวัตรกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด และได้เนื้อหาในหนังสือเรียนนี้ในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งตามเนื้อหาในหนังสือเรียนแต่ละกิจกรรมมีจุดเน้นในที่แตกต่างกันเริ่มต้นจากกิจกรรมที่ไม่ได้เน้นให้นักเรียนแก้ปัญหาแต่เน้นให้เขียนประโยคสัญลักษณ์ให้ได้ ไปสู่กิจกรรมที่เน้นให้แสดงวิธีการแก้ปัญหา ไปสู่กิจกรรมที่เน้นให้แสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยสัญลักษณ์ และแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยสัญลักษณ์ที่หลากหลาย จนกระทั่งนักเรียนสามารถคิดย้อนกลับจากสัญลักษณ์ให้เป็นสถานการณ์ ซึ่งสอดคล้องกับช่วงห่างของผลลัพธ์จากการบิบัติที่เพิ่มขึ้นของสัญลักษณ์

## ข้อเสนอแนะ

### 1. การนำผลการวิจัยไปใช้

ผลการวิจัยนี้เกิดขึ้นภายใต้ชั้นเรียนที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ซึ่งผลการวิจัยได้สะท้อนให้เห็นถึงลำดับของจุดเน้นในการจัดการเรียนการสอนในแต่ละกิจกรรมที่ส่งผลให้เกิดวิธีการแก้ปัญหาของนักเรียน ขณะเดียวกันได้สะท้อนให้เห็นถึงเนื้อหาในการจัดการเรียนรู้ตามหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมให้เกิดกระบวนการเปลี่ยนผ่านจากโลกกายภาพสู่โลกสัญลักษณ์ที่ช่วยให้การเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระยะยาว

### 2. การทำวิจัยในครั้งต่อไป

ในการวิจัยในครั้งนี้ใช้กรอบการวิจัยเพียงอย่างเดียวและใช้ทฤษฎีในการสร้างกรอบวิจัยเพียงอย่างเดียวซึ่งทำให้ได้ผลการวิจัยในรอบที่มีความลึกซึ้ง แต่ในขณะเดียวกันก็ไม่ครอบคลุมกระบวนการเรียนรู้ในมิติอื่น ซึ่งอาจทำให้พลาดมุมมองในการได้มาซึ่งผลการวิจัยที่กว้างและครอบคลุมกระบวนการเรียนรู้ หากต้องการศึกษาในระดับที่ลึกลงไปควรศึกษาในมิติของการเรียนรู้ระยะยาวในมิติที่ซับซ้อนมากขึ้นอาจช่วยให้เห็นผลการวิจัยในมิติที่เป็นรูปธรรมมากขึ้น

## กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

## เอกสารอ้างอิง

- ณิศรา สุทธิสังข์. (2556). *หน้าที่ของกระบวนการนามธรรมเพื่อสร้างความคิดรวบยอดของนักเรียนผ่านกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด* (วิทยานิพนธ์ปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต). สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- Cobb, P., Wood, T. and Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. In E. Von Glasersfeld (Ed.). *Radical constructivism in mathematics education*. (pp. 157-176). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Cobb, P., Confrey, J. and Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 1, 9 – 13.
- Inprasitha, M. (2010). One feature of adaptive lesson study in Thailand –Designing learning unit. *Proceedings of the 45<sup>th</sup> Korean National Meeting of Mathematics Education*, Dongkook University, Gyeongju. (pp.193-206). South Korea: Dongkook University.
- Isoda, M. (2010). Japanese theories for lesson study in mathematics education: A case of problem solving approach. In Y. Shimizu, Y. Sekiguchi, & K. Hatano (Eds.), *Proceedings of the 5<sup>th</sup> East Asia Regional Conference on Mathematics Education (EARCOME5)* (pp.176-181). Tokyo: National Olympics Memorial Youth Center.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school Mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23 (3), 29–33.

Tall, D. (2006). A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 195–215.

Tall, D., & Isoda, M. (2007). *Long-term development of mathematical thinking and lesson study*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

