

ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ผ่านมุมมองจากทฤษฎีสรคนิยมทางสังคม Nature of Mathematics through a Perspective of Social Constructivism

ลือชา ลดาชาติ^{1*}
Luecha Ladachart^{1*}

¹ภาควิชาหลักสูตรและการสอน วิทยาลัยการศึกษา มหาวิทยาลัยพะเยา, ladachart@gmail.com
(Department of Curriculum and Instruction, School of Education, University of Phayao)

บทคัดย่อ

บทความนี้มุ่งบ่งชี้ลักษณะของธรรมชาติของคณิตศาสตร์ผ่านมุมมองจากทฤษฎีสรคนิยมทางสังคม ซึ่งอธิบายว่าความรู้เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น ผ่านประสบการณ์กับสิ่งแวดล้อมทางกายภาพ และปฏิสัมพันธ์ภายใต้บริบททางสังคมและวัฒนธรรม แต่กระนั้นก็ตาม ความรู้ทางคณิตศาสตร์มักถูกมองว่าเป็นสิ่งที่มีอยู่แล้ว แน่นนอน เป็นสากล และเป็นอิสระจากมนุษย์ ดังนั้น การบ่งชี้ลักษณะพื้นฐานของธรรมชาติของคณิตศาสตร์บนพื้นฐานของทฤษฎีสรคนิยมทางสังคมจึงอาจให้แนวทางในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับญาณวิทยาของการเรียนรู้ของมนุษย์มากขึ้น โดยคณิตศาสตร์มีธรรมชาติที่มีลักษณะเชิงประจักษ์ ลักษณะเชิงอนุมาน ลักษณะเชิงอัตวิสัย ลักษณะที่ไม่จีรัง ลักษณะเชิงสร้างสรรค์ และลักษณะทางสังคมและวัฒนธรรม เปรียบเทียบกับธรรมชาติของวิทยาศาสตร์

คำสำคัญ: ญาณวิทยา ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ สรคนิยมทางสังคม

ABSTRACT

This article aims to identify aspects of the nature of mathematics via a perspective of social constructivism, which explains that knowledge is constructed by human through experience with physical environments and interactions within sociocultural contexts. Nonetheless, mathematical knowledge is often perceived as a prior, certain, universal, and independent of human. Thus, identifying basic aspects of the nature of mathematics based on social constructivism might provide a guideline for teaching and learning mathematics in ways that are more consistent with epistemology of human learning. Mathematics has its nature that is empirical, inferential, subjective, tentative, creative, and sociocultural as the nature of science.

KEYWORDS: Epistemology, Nature of Mathematics, Social Constructivism

*Corresponding author, E-mail: ladachart@gmail.com โทร. 054 466 666

Received: 25 April 2020 / Revised: 27 May 2020 / Accepted: 22 June 2020 / Published online: 30 December 2020

บทนำ

ทฤษฎีสรณคณยม (Constructivism) ได้กลายเป็นรากฐานของการปฏฐึรูปการศึษาของหลายประเทศท่วโลก รวมทั้งประเทศไทย ถึงแม้วาพระราชบัญญัติการศึษาแห่งชาต พ.ศ. 2542 (สำนักรงานคณสมการการการศึษาแห่งชาต, 2545) ไม่ได้ระบุถึงทฤษฎีสรณคณยมอย่างชัดแจ้ง แต่หลายข้อความส่อถึงแนวคิดพื้นฐานของทฤษฎีสรณคณยม ไม่ว่าจะเป็นการกำหนดให้ครู “(1) จัดเนื้อหาสาระและกิจกรรมให้สอดคล้องกับคณสนใจและคณถนดของผู้เรยน (2) ฝึกรักษะ กระบวนการคต การจัดการ การเผชิญสถานการณ์ และการประยูกต์คณรู้ ... (3) จัดกิจกรรมให้ผู้เรยนได้เรยนรู้จากประสบการณ์จริง ...” (มาตรา 24) ข้อความเหล่านั้สะท้อนถึงแนวคิดพื้นฐานของทฤษฎีสรณคณยมที่มองว่า การเรยนรู้คืกระบวนการสร้างคณหมายของผู้เรยน ซึ่งเกตขึ้นจากประสบการณ์ในชีวิตประจำวัน โดยการสร้างคณหมายใหม่ต้งอยู่บนพื้นฐานของคณรู้ คณคต และประสบการณ์เดิมของผู้เรยน นอกจากนี้ ทฤษฎีสรณคณยมยังได้รับการต่อยอดว่า กระบวนการทางสังคมระหว่างผู้เรยนกับบุคคลอื่น ๆ อาทิ พ่อแม่ ครู หรือเพื่อน สามารถยกระดับการเรยนรู้หรือการสร้างคณหมายของผู้เรยน ดังนั้น คำคณศัพท์ “ทางสังคม” จึงมักถูกเพิ่มเข้ามาเพื่อบ่งคณสำคัญของกระบวนการทางสังคมในการสร้างคณรู้

ตามมุมมองของทฤษฎีสรณคณยมทางสังคม คณรู้ใด ๆ ก็ตามล้วนเป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น ตัวอย่างเช่น คณรู้ทางภาษาศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นคำ ประโยค สัญลักษณ์ หรือไวยากรณ์ เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น ทั้งนี้เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการติดตอสื่อสารระหว่างกัน มนุษย์แต่ละกลุ่มในแต่ละพื้นที่จึงมีภาษาที่แตกต่างกัน และภาษาเหล่านั้นสามารถเปลี่ยนแปลงไปได้ตามกาลเวลา ในทำนองเดียวกัน คณรู้ทางประวัติศาสตร์ก็เป็นสิ่งที่มนุษย์เขียนขึ้น ด้วยเหตุนี้ ประวัติศาสตร์ของเหตุการณ์ในอดีตเดียวกัน (อาทิ สงครามระหว่างกลุ่มคน 2 ฝ่าย) จึงมักแตกต่างกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าฝ่ายใดเป็นผู้เขียนหรือสร้างคณรู้ทางประวัติศาสตร์นั้น ในขณะที่คณรู้ทางภาษาศาสตร์และคณรู้ทางประวัติศาสตร์มีลักษณะที่บ่งบอกว่าเป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้นอย่างชัดเจน ทั้งนี้เพราะคณรู้เหล่านั้นมีความหลากหลาย แตกต่าง หรือแม้กระทั่งขัดแย้งกันได้ แต่คณรู้ในศาสตร์บางสาขา อาทิ คณรู้ทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งค่อนข้างมีความเป็นสากลมากกว่าคณรู้ทางภาษาศาสตร์และคณรู้ทางประวัติศาสตร์ อาจถูกมองว่าเป็นสิ่งที่มนุษย์ “ค้นพบ” มากกว่าสิ่งที่มนุษย์ “สร้าง” ขึ้น แต่การศึกษาประวัติของการพัฒนาคณรู้ทางวิทยาศาสตร์แต่ละเรื่องบ่งชี้ว่า คณรู้ทางวิทยาศาสตร์ก็เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้นเช่นเดียวกัน (เลือชา ลดาชาติ, 2561)

เช่นเดียวกับคณรู้ทางวิทยาศาสตร์ คณรู้ทางคณิตศาสตร์มีความแน่นอนและเป็นสากลค่อนข้างสูง คณรู้ทางคณิตศาสตร์จึงมักถูกมองว่าเป็นสิ่งที่มามีอยู่ก่อนแล้ว และถูก “ค้นพบ” โดยมนุษย์หรือนักคณิตศาสตร์ในภายหลัง มุมมองนี้ขัดแย้งโดยตรงกับแนวคิดพื้นฐานของทฤษฎีสรณคณยมทางสังคม ซึ่งมองว่าคณรู้ใด ๆ ก็ตามล้วนเป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น ความขัดแย้งนี้สามารถส่งผลกระทบต่อการจัดการเรยนการสอนคณิตศาสตร์ จากการศึษาความเชือของครูคณิตศาสตร์จำนวนหนึ่ง Stipek et al. (2001) พบว่า หากครูเชือว่าคณรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มามีอยู่ก่อนแล้วและถูกค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ ครูก็จะเน้นการถ่ายทอดคณรู้แก่นักเรยน แต่หากครูเชือว่าคณรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่นักคณิตศาสตร์สร้างขึ้น ครูก็จะเน้นให้นักเรยนได้แก้ปัญหา พัฒนาคณคต และถกเถียงกัน เพื่อสร้างคณรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง ในขณะที่นโยบายต่าง ๆ พยายามส่งเสริมการเรยนการสอนคณิตศาสตร์รูปแบบต่าง ๆ อาทิ วิธีการแบบเปิด (Open-ended

approach) ที่สอดคล้องกับทฤษฎีสรณินยทางสังคม แต่ความพยายามเหล่านั้นอาจไม่ประสบผลสำเร็จเท่าที่ควร ทั้งนี้เพราะความพยายามนั้นขัดแย้งกับความเชื่อที่ครูหลายคนมีต่อธรรมชาติของความรู้และกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ดังนั้น บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อนำแนวคิดพื้นฐานของทฤษฎีสรณินยทางสังคมมาประยุกต์ใช้ในการอธิบายธรรมชาติของคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพื่ออธิบายว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์ถูกสร้างขึ้นมาได้อย่างไร ด้วยข้อสันนิษฐานเบื้องต้นว่าคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มีลักษณะหลายประการร่วมกัน (American Association for the Advancement of Science [AAAS], 1990) ผู้เขียนจึงได้นำลักษณะสำคัญของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์ 6 ประการ ได้แก่ 1. ลักษณะเชิงประจักษ์ (Empirical aspect) 2. ลักษณะเชิงอนุมาน (Inferential aspect) 3. ลักษณะเชิงอัตวิสัย (Subjective aspect) 4. ลักษณะที่ไม่จีรัง (Tentative aspect) 5. ลักษณะเชิงสร้างสรรค์ (Creative aspect) และ 6. ลักษณะทางสังคมและวัฒนธรรม (Sociocultural aspect) เป็นกรอบแนวคิดในการบ่งชี้ว่า ลักษณะสำคัญเหล่านี้สามารถขยายขอบเขตให้ครอบคลุมธรรมชาติของคณิตศาสตร์ได้หรือไม่ เนื่องจากลักษณะสำคัญเหล่านี้มีพื้นฐานมาจากทฤษฎีสรณินยทางสังคม การวิเคราะห์นี้จึงอาจช่วยให้ครูคณิตศาสตร์เข้าใจและเห็นภาพว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์แท้จริงแล้วเป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น ทั้งจากประสบการณ์กับโลกทางกายภาพและจากกระบวนการทางสังคม (Ernest, 1992) เปรียบเทียบกับความรู้ในศาสตร์สาขาอื่น ๆ

การทบทวนเอกสาร

บทความนี้ไม่ใช่ความพยายามแรกในการวิเคราะห์ลักษณะสำคัญของธรรมชาติของคณิตศาสตร์ หลายฝ่ายได้นำเสนอประเด็นนี้มาบ้างแล้ว ตัวอย่างเช่น AAAS (1990) บ่งชี้ลักษณะ 3 ประการของธรรมชาติของคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการรู้วิทยาศาสตร์ (Scientific literacy) ได้แก่ 1. แบบรูปและความสัมพันธ์ (Patterns and relationships) 2. ความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี (Mathematics, science, and technology) และ 3. การสืบเสาะทางคณิตศาสตร์ (Mathematical inquiry) ลักษณะที่ 1 เป็นการบรรยายว่า คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการสำรวจสิ่งต่าง ๆ อาทิ ตัวเลข และรูปร่าง เพื่อสร้างแบบรูป (Patterns) และความสัมพันธ์ (relationships) ที่เป็นไปได้ของสิ่งเหล่านั้น ทั้งนี้เพื่อลดความซับซ้อนของสิ่งเหล่านั้นให้อยู่ในรูปแบบของตัวแทนที่ง่ายขึ้น ตัวอย่างเช่น นักคณิตศาสตร์อาจพิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉากที่หลากหลาย ทั้งในแง่ของขนาด สี และแนวการวางตัว เพื่อระบุแบบรูปหรือความสัมพันธ์ที่สามเหลี่ยมมุมฉากเหล่านั้นมีร่วมกัน จนกระทั่งนักคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า ความยาวกำลังสองของด้านตรงข้ามมุมฉากมีค่าเท่ากับผลบวกของความยาวกำลังสองของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้าน ซึ่งก็คือทฤษฎีบทของพีทาโกรัสนั่นเอง

ลักษณะที่ 2 เป็นการบรรยายว่า คณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี โดยวิทยาศาสตร์กำหนดปัญหาที่น่าสนใจให้กับคณิตศาสตร์ ในขณะที่คณิตศาสตร์ให้เครื่องมือที่ทรงพลังแก่วิทยาศาสตร์ในการวิเคราะห์ข้อมูล นอกจากนี้ คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ยังมีลักษณะพื้นฐานหลายประการร่วมกัน อาทิ ความเชื่อในการมีอยู่ของแบบแผนของสิ่งต่าง ๆ ที่มนุษย์สามารถทำความเข้าใจได้ การใช้จินตนาการและตรรกะที่เข้มงวดในการสร้างความรู้ใหม่ และการให้ความสำคัญกับความซื่อสัตย์ ความโปร่งใส และการตรวจสอบความมีเหตุผลของการสร้างข้อสรุป ตลอดจนการให้ความสำคัญร่วมกันระดับนานาชาติ เป็นต้น นอกจากนี้ คณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานสำหรับการสร้างและออกแบบเทคโนโลยีต่าง ๆ อาทิ คอมพิวเตอร์ และการเขียนโปรแกรม ในทางกลับกัน โปรแกรมจำลองคอมพิวเตอร์ก็อาจเปิดประเด็นใหม่ ๆ สำหรับการศึกษาทางคณิตศาสตร์ ด้วยความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ลักษณะที่ 2 จึงเป็นข้อสันนิษฐานเบื้องต้นที่ผู้เขียนเชื่อว่า ลักษณะสำคัญของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์ 6 ประการ (ดังที่เกริ่นไว้ในบทนำ และจะนำเสนอรายละเอียดในหัวข้อถัดไป) สามารถเป็นกรอบแนวคิดในการวิเคราะห์ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ในบทความฉบับนี้

ลักษณะที่ 3 เป็นการบรรยายกระบวนการสืบเสาะทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 3 ขั้นตอนหลัก ได้แก่ 1. การสร้างตัวแทนเชิงนามธรรมและสัญลักษณ์ (Abstraction and symbolic representations) 2. การจัดกระทำข้อแฉงทางคณิตศาสตร์ (Manipulating mathematical statements) และ 3. การนำผลการจัดกระทำทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ (Applications) ขั้นตอนแรกคือการที่นักคณิตศาสตร์สังเกตความคล้ายคลึงกันของวัตถุหรือเหตุการณ์ต่าง ๆ เพื่อสร้างตัวแทนที่เป็นนามธรรมของวัตถุหรือเหตุการณ์เหล่านั้น ตัวอย่างเช่น จากการสังเกตรูปร่างของดวงอาทิตย์ ดวงจันทร์ และดอกทานตะวัน นักคณิตศาสตร์สามารถสร้างสัญลักษณ์ “วงกลม” ที่เป็นตัวแทนเชิงนามธรรมของสิ่งเหล่านี้ การสร้างตัวแทนเชิงนามธรรมจะช่วยให้นักคณิตศาสตร์จดจำ สืบค้น และจัดกระทำลักษณะบางอย่างของ “วงกลม” เพื่อระบุแบบรูปและความสัมพันธ์ต่าง ๆ ในขั้นตอนที่ 2 ตัวอย่างเช่น นักคณิตศาสตร์อาจระบุความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่วงกลม ความยาวเส้นรอบวงกลม และรัศมีของวงกลม จากนั้น นักคณิตศาสตร์จึงนำแบบรูปหรือความสัมพันธ์นั้นไปประยุกต์ใช้ในบริบทต่าง ๆ ในขั้นตอนที่ 3 อาทิ การคำนวณหาพื้นที่ของล้อรถ และเหรียญบาท เป็นต้น ขั้นตอนเหล่านี้จึงบอกเป็นนัยว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น

แม้ลักษณะสำคัญ 3 ประการข้างต้นให้ภาพกว้าง ๆ เกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ แต่กลับไม่ได้ระบุว่า “ความรู้ทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นได้อย่างไร” นักปรัชญาจึงพยายามวิเคราะห์หาวิทยา (Ontology) ของคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น Dossey (1992) จำแนกแนวคิดเกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ 1. แนวคิดภายนอก (External conceptions) ซึ่งมีพื้นฐานมาจากแนวคิดของเพลโตที่ว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์มีอยู่ในโลกภายนอกจิตใจของมนุษย์ และ 2. แนวคิดภายใน (Internal conceptions) ซึ่งมีพื้นฐานมาจากแนวคิดของอริสโตเติลที่ว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นตัวแทนภายในจิตใจที่มนุษย์สร้างขึ้นเพื่อแทนสิ่งที่เกิดขึ้นในโลกภายนอก ในทำนองเดียวกัน Ernest (1996) ใช้มุมมองทางปรัชญาและจิตวิทยาในการจำแนกธรรมชาติของคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ภาพ ได้แก่ 1. ภาพที่สัมบูรณ์ (Absolutist images) ซึ่งคณิตศาสตร์เป็น “องค์ความรู้ที่เป็นปรนัย สัมบูรณ์ แน่นอน และแก้ไขไม่ได้” (หน้าที่ 1) และ 2. ภาพที่ผิดพลาดได้ (Fallibilist images) ซึ่งคณิตศาสตร์เป็น “ผลลัพธ์ของกระบวนการทางสังคม” ดังนั้น “ความรู้ทางคณิตศาสตร์จึงผิดพลาดได้และเปิดกว้างต่อการปรับปรุงแก้ไข” (หน้าที่ 2-3) มุมมองแบบหลังสอดคล้องกับสิ่งที่ Lerman (1990) ได้กล่าวว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์มีค่านิยมและวัฒนธรรมพ่วงติดอยู่

“ความคิดทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ที่ผู้คนกำลังสอนกันนั้น มีจุดเริ่มมาในช่วงเวลาหนึ่งและจากสถานที่หนึ่ง ในฐานะสิ่งที่ตอบสนองต่อความต้องการบางอย่างทางสังคม ไม่ว่าจะเป็นของนักคณิตศาสตร์แต่ละคน หรือของชุมชนที่ใหญ่กว่านั้น” (หน้าที่ 60)

ในขณะที่หาวิทยาของคณิตศาสตร์เริ่มมีความชัดเจนขึ้นว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น (Ernest, 1993b) แต่กระนั้น ความชัดเจนในแง่ของญาณวิทยาว่า “มนุษย์สร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาได้อย่างไร” ยังไม่ปรากฏแน่ชัด เมื่อเปรียบเทียบกับญาณวิทยาของวิทยาศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ศึกษาได้สร้างรายการที่บ่งชี้ลักษณะสำคัญของญาณวิทยาของวิทยาศาสตร์ (รายละเอียดที่ ลือชา ลดาชาติ ลฎาภา สุทธกุล และชาติรี ฝายคำตา, 2556) แต่รายการที่บ่งชี้ลักษณะสำคัญของญาณวิทยาของคณิตศาสตร์ยังไม่มีชัดเจน ด้วยเหตุนี้ Pair (2018) จึงได้สังเคราะห์ลักษณะสำคัญของธรรมชาติของคณิตศาสตร์ขึ้น ซึ่งประกอบด้วย 4 ลักษณะ ได้แก่ 1. ความคิดและการปฏิบัติทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งในอัตลักษณ์ของมนุษย์ (Mathematical ideas and practices are part of human identity) 2. ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นพลวัตและเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ (Mathematical knowledge is dynamic and forever changing) 3. การสืบเสาะทางคณิตศาสตร์

คือการสำรวจความคิด (Mathematical inquiry is an exploration of ideas) และ 4. ความคิดและความรู้ทางคณิตศาสตร์ถูกตรวจสอบทางสังคมผ่านการโต้แย้ง (Mathematical ideas and knowledge are socially vetted through argumentation)

ลักษณะสำคัญของญาณวิทยาของคณิตศาสตร์ของ Pair (2018) สนับสนุนว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์ถูกสร้างขึ้นและตรวจสอบโดยมนุษย์ผ่านกระบวนการทางสังคม ดังนั้น ความรู้ทางคณิตศาสตร์จึงสามารถเปลี่ยนแปลงได้ และเมื่อความรู้ทางคณิตศาสตร์ถูกตรวจสอบจนเป็นที่แน่ใจในระดับหนึ่งแล้ว ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้กลายเป็นส่วนหนึ่งในสังคมและวัฒนธรรมของมนุษย์ ลักษณะสำคัญเหล่านี้บางส่วนสอดคล้องกับลักษณะสำคัญของญาณวิทยาของวิทยาศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นความไม่แน่นอนของความรู้ทางวิทยาศาสตร์ และการที่ความรู้ทางวิทยาศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งในสังคมและวัฒนธรรมของมนุษย์ ทั้งนี้ เพราะลักษณะสำคัญเหล่านี้มีพื้นฐานมาจากทฤษฎีสมมติฐานทางสังคมเช่นเดียวกัน อย่างไรก็ตาม ในขณะที่ลักษณะสำคัญของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์ระบุอย่างชัดเจนว่า ความรู้ทางวิทยาศาสตร์ถูกสร้างขึ้นมาจากการลงข้อสรุปบนพื้นฐานของหลักฐานเชิงประจักษ์ แต่ Pair (2018) ไม่ได้มีการระบุว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์ถูกสร้างขึ้นจากอะไร หรือในอีกความหมายหนึ่ง “อะไรคือแหล่งกำเนิดของความรู้ทางคณิตศาสตร์” (Kean, 2017, p. 64) ตามทฤษฎีสมมติฐานทางสังคม ความรู้ใด ๆ ไม่อาจเกิดขึ้นได้ในสุญญากาศ หากปราศจากคำตอบของคำถามนี้แล้ว ญาณวิทยาของคณิตศาสตร์ก็ไม่อาจชัดเจนขึ้นได้เลย

กรอบแนวคิด

ในบทความนี้ ผู้เขียนนำลักษณะสำคัญ 6 ประการของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์มาประยุกต์ใช้กับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ สาเหตุที่ผู้เขียนทำเช่นนี้เพราะ 1. วิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มีลักษณะร่วมกันหลายประการ (AAAS, 1990) 2. ลักษณะสำคัญของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์มีพื้นฐานมาจากทฤษฎีสมมติฐานทางสังคม ซึ่งนักปรัชญาคณิตศาสตร์หลายคนมองว่า ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ก็มีพื้นฐานมาจากทฤษฎีสมมติฐานทางสังคมเช่นเดียวกัน (Ernest, 1992) 3. ในบางมุมมอง คณิตศาสตร์สามารถเป็นศาสตร์สาขาหนึ่งของวิทยาศาสตร์ ดังเช่นที่หลายมหาวิทยาลัยมีภาควิชาคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งในคณะวิทยาศาสตร์ ด้วยสาเหตุเหล่านี้ ผู้เขียนจึงมองว่า ลักษณะสำคัญ 6 ประการของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์ ซึ่งนักวิทยาศาสตร์ศึกษาได้สังเคราะห์ไว้สำหรับการจัดการเรียนการสอนวิทยาศาสตร์ (Abd-El-Khalick, Bell, & Lederman, 1998; Akerson, Abd-El-Khalick, & Lederman, 2000; Schwartz & Lederman, 2002; Schwartz, Lederman, & Crawford, 2004; Akerson & Volrich, 2006) ก็อาจเป็นแนวทางในการบ่งชี้ลักษณะสำคัญของธรรมชาติของคณิตศาสตร์ได้ โดยรายละเอียดและตัวอย่างของลักษณะสำคัญ 6 ประการของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์มีดังนี้ (ลีอา ลดาชาติ ลฎาภา สุทธกุล และชาติรี ฝ่ายคำตา, 2556)

1. ลักษณะเชิงประจักษ์ (Empirical aspect)

ลักษณะนี้กล่าวถึงความจำเป็นของหลักฐานเชิงประจักษ์ต่อการสร้างความรู้ทางวิทยาศาสตร์ คำว่า “เชิงประจักษ์” (Empirical) ในที่นี้หมายถึงประสบการณ์เกี่ยวกับปรากฏการณ์ทางธรรมชาติที่นักวิทยาศาสตร์ได้รับผ่านประสาทสัมผัส ไม่ว่าจะเป็นการได้ยิน การมองเห็น การดมกลิ่น การรับรส และการสัมผัส ทั้งนี้ นักวิทยาศาสตร์อาจมีการใช้เครื่องมือทางวิทยาศาสตร์ด้วยหรือไม่ก็ได้ ความรู้ทางวิทยาศาสตร์ (อาทิ กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน แบบจำลองอะตอม และทฤษฎีวิวัฒนาการ) ล้วนจำเป็นต้องมีหลักฐานเชิงประจักษ์มาสนับสนุน หากปราศจากหลักฐานเชิงประจักษ์แล้ว ความคิดของนักวิทยาศาสตร์ก็จะเป็นแค่ข้อกล่าวอ้างทางวิทยาศาสตร์ แต่ไม่ใช่ความรู้ทางวิทยาศาสตร์

2. ลักษณะเชิงอนุมาน (Inferential aspect)

ในขณะที่หลักฐานเชิงประจักษ์เป็นสิ่งจำเป็นในการสร้างความรู้ทางวิทยาศาสตร์ แต่การมีเพียงแค่หลักฐานเชิงประจักษ์ยังไม่เพียงพอให้นักวิทยาศาสตร์สร้างความรู้ทางวิทยาศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์จำเป็นต้องตีความและลงข้อสรุปจากหลักฐานเชิงประจักษ์เพื่อสร้างเป็นความรู้ทางวิทยาศาสตร์ ตัวอย่างเช่น การกระเจิงของรังสีแอลฟาที่เดินทางไปยังแผ่นทองคำเปลวจะยังคงเป็นเพียงแค่หลักฐานเชิงประจักษ์ชิ้นหนึ่ง และไม่มีทางกลายเป็นแบบจำลองอะตอมขึ้นมาได้ ยกเว้นเสียแต่ว่า รัทเทอร์ฟอร์ดมีการตีความและลงข้อสรุปว่า โครงสร้างและองค์ประกอบภายในอะตอมของแผ่นทองคำเปลวเป็นอย่างไร

3. ลักษณะเชิงอัตวิสัย (Subjective aspect)

ความรู้ทางวิทยาศาสตร์เกิดขึ้นได้จากการตีความและลงข้อสรุปจากหลักฐานเชิงประจักษ์ก็จริง แต่นั่นไม่ได้หมายความว่า นักวิทยาศาสตร์ทุกคนจะต้องตีความและลงข้อสรุปจากหลักฐานเชิงประจักษ์เดียวกันไปในทิศทางเดียวกัน ในทางตรงกันข้าม นักวิทยาศาสตร์แต่ละคนมีประสบการณ์ มุมมอง ความรู้ และกรอบแนวคิดทางทฤษฎีที่แตกต่างกัน ดังนั้น นักวิทยาศาสตร์แต่ละคนจึงอาจตีความและลงข้อสรุปจากหลักฐานเชิงประจักษ์ได้แตกต่างกัน ตัวอย่างเช่น แมล์มาร์คและดาร์วินเห็นตรงกันว่า สิ่งมีชีวิตสามารถวิวัฒนาการได้ แต่ทั้งคู่กลับเห็นต่างกันอย่างสิ้นเชิงในแง่ของกระบวนการที่สิ่งมีชีวิตวิวัฒนาการ

4. ลักษณะที่ไม่จีรัง (Tentative aspect)

ด้วยความที่นักวิทยาศาสตร์แต่ละคนสามารถตีความและลงข้อสรุปได้แตกต่างกัน นักวิทยาศาสตร์จึงต้องมีการตรวจสอบว่า การตีความและการลงข้อสรุปแบบใดมีความน่าเชื่อถือมากกว่ากัน การตรวจสอบนี้จึงเกี่ยวข้องกับกระบวนการทางสังคม ซึ่งนักวิทยาศาสตร์นำเสนอข้อกล่าวอ้าง หลักฐาน และเหตุผลที่สนับสนุนข้อกล่าวอ้างของตนเอง ทั้งนี้เพื่อนำไปสู่การตรวจสอบ ซักถาม และโต้แย้ง ก่อนที่ข้อกล่าวอ้างนั้นจะเป็นที่ยอมรับให้เป็นความรู้ทางวิทยาศาสตร์ อย่างไรก็ตาม ความรู้ทางวิทยาศาสตร์นั้นอาจจะไม่ถูกต้องเสมอไป ทั้งนี้เพราะการค้นพบหลักฐานใหม่ที่ขัดแย้งกับความรู้ทางวิทยาศาสตร์นั้นอาจเกิดขึ้นได้ในอนาคต ความรู้ทางวิทยาศาสตร์จึงเป็นเพียงสิ่งชั่วคราว

5. ลักษณะเชิงสร้างสรรค์ (Creative aspect)

ด้วยความที่นักวิทยาศาสตร์มุ่งทำความเข้าใจปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ ซึ่งมักเป็นปรากฏการณ์ที่นักวิทยาศาสตร์ไม่อาจเข้าถึงได้โดยตรง ทั้งนี้เพราะปรากฏการณ์นั้นอาจเคยเกิดขึ้นในอดีต (เช่น วิวัฒนาการ) หรือเกิดขึ้นเร็วเกินไป (เช่น การเคลื่อนที่ของแสง) หรือเกิดขึ้นในระดับจุลภาค (เช่น การเกิดปฏิกิริยาเคมี) นักวิทยาศาสตร์จึงจำเป็นต้องใช้จินตนาการและความคิดสร้างสรรค์เพื่อสร้างแนวคิดที่เป็นนามธรรมที่จะช่วยอธิบายและทำความเข้าใจปรากฏการณ์เหล่านั้น อาทิ ยีน แอลลีล โฟตอน สนามไฟฟ้า อะตอม และระดับชั้นของอิเล็กตรอนในอะตอม แต่กระนั้นก็ตาม จินตนาการและความคิดสร้างสรรค์ไม่ได้ถูกใช้ตามอำเภอใจ หากแต่ต้องตั้งอยู่บนพื้นฐานของตรรกะ เหตุผล และหลักฐานเชิงประจักษ์

6. ลักษณะทางสังคมและวัฒนธรรม (Sociocultural aspect)

เมื่อการสร้างความรู้ทางวิทยาศาสตร์เกิดขึ้นด้วยกระบวนการทางสังคม ปัจจัยทางสังคมและวัฒนธรรมจึงเข้ามามีอิทธิพลต่อการสร้างความรู้ทางวิทยาศาสตร์ ตัวอย่างเช่น ดาร์วินต้องรอเวลาหลายทศวรรษ กว่าที่ทฤษฎีวิวัฒนาการจะเป็นที่ยอมรับในสังคมตะวันตก ทั้งนี้เพราะทฤษฎีวิวัฒนาการมีความขัดแย้งกับความเชื่อทางศาสนาเกี่ยวกับการสรรค์สร้างของพระเจ้า อย่างไรก็ตาม เมื่อความรู้ทางวิทยาศาสตร์เป็นที่ยอมรับแล้ว ความรู้ทางวิทยาศาสตร์ก็อาจส่งผลต่อความเชื่อและค่านิยมของผู้คนในสังคมได้เช่นเดียวกัน ตัวอย่างเช่น ทฤษฎีวิวัฒนาการถูกตีความอย่างผิด ๆ จนกลายเป็นสัพพัญญูศาสตร์ (Eugenics) ที่เน้นการปรับปรุงพันธุ์กรรมของมนุษย์ผ่านกลไกทางกฎหมายของรัฐ

จากลักษณะสำคัญของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์เหล่านี้ ร่วมกับการทบทวนวรรณกรรมเกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ ผู้เขียนเห็นความสอดคล้องกันบางประการ ลักษณะสำคัญเหล่านี้ในภาพรวมมีพื้นฐานมาจากทฤษฎีสรรคานิยมทาง

สังคม ซึ่งเป็นมุมมองที่นักคณิตศาสตร์ศึกษากำลังสนใจอยู่ (Dossey, 1992; Ernest, 1993b; Lerman, 1990) ดังนั้น ลักษณะสำคัญเหล่านี้อาจช่วยสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ให้ดีขึ้น นอกจากนี้ ข้อความจำนวนหนึ่งบ่งชี้ว่าธรรมชาติของคณิตศาสตร์มีความสอดคล้องกับลักษณะสำคัญเหล่านี้ ตัวอย่างเช่น Ernest (1992) บันทึกไว้ว่า “ในทางปรัชญามุมมองสัจนิยมทางสังคมที่เสนอไว้ ณ ตรงนี้เป็นทั้งสัจนิยมและประสบการณ์นิยมในแง่ที่ว่า ภาษาของมนุษย์ ข้อตกลง และประสบการณ์มีบทบาทต่อการสร้างความจริง หัวใจของมุมมองนี้คือข้อเท็จจริงที่ว่า ตลอดช่วงเวลาที่ผ่านมา ความรู้ทางคณิตศาสตร์เปลี่ยนแปลง ... ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง คณิตศาสตร์คือองค์ความรู้ที่เป็นข้อตกลงเชิงสหัตถวิสัยมากกว่าองค์ความรู้ที่เป็นปรนัย” (หน้าที่ 93) ซึ่งแสดงถึงลักษณะเชิงประจักษ์ ลักษณะที่ไม่จีรัง ลักษณะเชิงอัตวิสัย และลักษณะทางสังคมและวัฒนธรรม ถึงกระนั้นก็ดี บทวิเคราะห์ธรรมชาติของคณิตศาสตร์ด้วยกรอบแนวคิดที่มาจากลักษณะสำคัญของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์ยังไม่มีปรากฏทั้งในและต่างประเทศ

ผลการวิเคราะห์

ผู้เขียนได้นำลักษณะสำคัญ 6 ประการของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์ประยุกต์ใช้เป็นกรอบแนวคิดในการวิเคราะห์และบ่งชี้ลักษณะสำคัญของธรรมชาติของคณิตศาสตร์ แต่ก่อนที่ผู้เขียนจะนำเสนอรายละเอียด ผู้เขียนขออภัยไว้ในเบื้องต้นว่า แม้ลักษณะสำคัญเหล่านี้จะถูกนำเสนอไปที่แต่ละลักษณะ ซึ่งอาจทำให้เกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนว่าลักษณะสำคัญเหล่านี้เป็นอิสระจากกัน แต่ในความเป็นจริงแล้ว ลักษณะสำคัญเหล่านี้เกี่ยวเนื่องและมีความสัมพันธ์กัน (Schwartz & Lederman, 2008; ลือชา ลดาชาติ และ ลฎาภา ลดาชาติ, 2560ก) การนำเสนอลักษณะสำคัญเป็นข้อ ๆ จึงเป็นไปเพื่อความสะดวกของผู้เขียน และเพื่อเน้นความชัดเจนของแต่ละลักษณะสำคัญเท่านั้น

1. ลักษณะเชิงประจักษ์ (Empirical aspect)

จากความพยายามในการวิเคราะห์ว่า นักคณิตศาสตร์ใช้อะไรเป็นพื้นฐานในการสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ Lakoff & Nunez (2000) ใช้ทฤษฎีที่มีชื่อว่า “สติปัญญาที่มีตัวตน” (Embodied cognition) เพื่ออธิบายว่า “ความรู้ทางคณิตศาสตร์มาจากไหน” ใจความสำคัญของทฤษฎีนี้มีอยู่ว่า แหล่งกำเนิดของความคิดต่าง ๆ รวมทั้งความคิดทางคณิตศาสตร์ มาจากประสบการณ์ในชีวิตประจำวันทั่วไปของมนุษย์ โดยประสบการณ์นั้นเกิดจากปฏิสัมพันธ์ระหว่างความคิดของมนุษย์กับโลกทางกายภาพภายนอก ซึ่งต่างฝ่ายต่างสร้างเงื่อนไขหรือข้อจำกัดว่า ความคิดทางคณิตศาสตร์จะถูกสร้างขึ้นในความคิดของมนุษย์อย่างไร (Edwards, 2003) ทั้งนี้ความคิดทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นผ่านกลไกบางประการ อาทิ การสร้างแผนที่ทางความคิด (Conceptual mapping) และการอุปมาอุปไมย (Metaphor) ในการนี้ Nunez (2000) ได้ยกตัวอย่างกรณีเรื่องเซตว่า มนุษย์มีประสบการณ์ในชีวิตประจำวันเกี่ยวกับภาษาเช่นต่าง ๆ ซึ่งมีขอบเขตที่ชัดเจน และภาษาหนึ่งสามารถอยู่ในหรือนอกอีกภาษาหนึ่งได้ ประสบการณ์ในชีวิตประจำวันเช่นนี้ทำหน้าที่เป็นแหล่งกำเนิดของความคิดเกี่ยวกับเซตผ่านการอุปมาอุปไมยกับภาษาความรู้ทางคณิตศาสตร์มีจุดเริ่มต้นมาจากประสบการณ์เชิงประจักษ์ของมนุษย์ ดังที่ Nunez (2000) กล่าวไว้ว่า

“นี่คือการอุปมาอุปไมยทางแนวคิด(ที่เกิดขึ้น)ตามธรรมชาติ ในชีวิตประจำวัน และอย่างไม่รู้ตัว สำหรับสิ่งที่คลาส(หรือเซต)เป็น มันเป็นการอุปมาอุปไมยพื้นฐาน มันช่วยวางความคิดเกี่ยวกับคลาส(หรือเซต)ลงบนความคิดเกี่ยวกับพื้นที่ที่มีขอบเขตในปริภูมิ ... นี่คือวิถีทางที่เราสร้างความคิดขึ้นจากชีวิตประจำวัน” (หน้าที่ 12)

2. ลักษณะเชิงอนุมาน (Inferential aspect)

ในหนังสือเรื่อง “คนเราคิดอย่างไร” Dewey (1910) เขียนไว้ว่า การอนุมานหรือการลงข้อสรุปเป็นความคิดพื้นฐานของมนุษย์ ซึ่งมีอยู่ด้วยกัน 2 รูปแบบหลัก ๆ ได้แก่ การอุปนัย (Induction) และการนิรนัย (Deduction) โดยการอุปนัย “เป็น

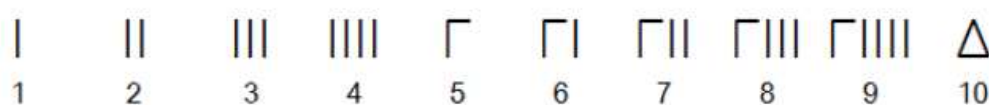
การค้นหาลักการ(ทั่วไป)ที่ผู้กรวม(หลักฐานและข้อเท็จจริงต่าง ๆ)” ในขณะที่การนิรนัยเป็นการ “ทดสอบ ยืนยัน ปฏิเสธ และปรับปรุง(ลักการทั่วไปนั้น)” (หน้าที่ 82) ด้วยการอนุมาน 2 รูปแบบนี้เป็นความคิดพื้นฐานของมนุษย์ ทั้งการอุปนัยและการนิรนัยจึงมีบทบาทสำคัญในการสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นการสร้างและการทดสอบทฤษฎีบทต่าง ๆ (Christiansen, 1969) ตัวอย่างเช่น การสังเกตสามเหลี่ยมมุมฉากจำนวนหนึ่งอาจนำไปสู่การอุปนัยเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมมุมฉากเดียวกัน ก่อนที่ความสัมพันธ์นี้จะถูกทดสอบด้วยการนิรนัยกับสามเหลี่ยมมุมฉากอื่น ๆ จนกระทั่งความสัมพันธ์นี้ได้รับการยืนยันและกลายเป็นทฤษฎีบทของพิทาโกรัสในเวลาต่อมา ในการนี้ Marton (2015) เสนอว่า ความผันแปรของสิ่งต่าง ๆ เป็นปัจจัยสำคัญที่ช่วยและกำหนดให้มนุษย์สังเกตเห็นลักษณะสำคัญและแยกลักษณะสำคัญนั้นออกจากลักษณะอื่นที่ไม่สำคัญ อันจะนำไปสู่การอุปนัยเพื่อสร้างแบบรูปของสิ่งเหล่านั้นได้ง่ายขึ้น (ลือชา ลดาชาติ และ ลฎาภา ลดาชาติ, 2560ข)

3. ลักษณะเชิงอัตวิสัย (Subjective aspect)

เมื่อความคิดทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นจากประสบการณ์ที่มนุษย์มีปฏิสัมพันธ์กับโลกทางกายภาพ มนุษย์แต่ละคนจึงอาจมีความคิดทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกันไป ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ที่แต่ละคนได้รับ ดังตัวอย่างเกี่ยวกับการสร้างหน่วยวัดต่าง ๆ ซึ่งคนไทยในอดีตใช้ขนาดของอวัยวะในร่างกายเป็นหน่วยวัด อาทิ วา ศอก นิ้ว และคืบ ในทำนองเดียวกัน ชาวอียิปต์โบราณก็ใช้ความยาวแขนและความกว้างของฝ่ามือเป็นหน่วยวัดความยาว แม้วิธีการวัดทั้งสองคล้ายกันในแง่ของการใช้อวัยวะในร่างกายเป็นเกณฑ์ แต่ 1 วาของคนไทย กับ 1 วาของชาวอียิปต์อาจมีค่าไม่เท่ากัน ซึ่งแสดงถึงลักษณะเชิงอัตวิสัยของการวัด ในปัจจุบัน นักคณิตศาสตร์ได้ลดอัตวิสัยนี้โดยการใช้หน่วยมาตรฐาน แต่หลักฐานทางประวัติศาสตร์เช่นนี้บ่งชี้ว่าความรู้และวิธีการทางคณิตศาสตร์มีลักษณะเชิงอัตวิสัยแฝงอยู่ตั้งแต่นั้น ซึ่งไม่แตกต่างไปจากความรู้และวิธีการในศาสตร์สาขาอื่น มันเป็นช่วงเวลาในภายหลังที่อัตวิสัยเหล่านั้นถูกกำจัดหรือทำให้เป็นปรนัยมากขึ้น ถึงกระนั้นก็ตาม อัตวิสัยบางอย่างยังคงปรากฏในความรู้ทางคณิตศาสตร์ในปัจจุบัน ดังเช่นการมีระบบพิกัดที่หลากหลาย ไม่ว่าจะเป็นระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (x, y , และ z) ระบบพิกัดวงกลม (r, θ , และ ϕ) และระบบพิกัดเชิงขั้ว (r, θ , และ h)

4. ลักษณะที่ไม่จีรัง (Tentative aspect)

ความไม่แน่นอนของความรู้ทางคณิตศาสตร์อาจไม่ปรากฏชัดเจนนักในปัจจุบัน ทั้งนี้เพราะความรู้ทางคณิตศาสตร์ในปัจจุบันได้ผ่านการทดสอบและปรับปรุงมาอย่างยาวนาน แต่นั่นไม่ได้หมายความว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่มีการเปลี่ยนแปลง Ernest (1993a) ยืนยันว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์มีการเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ แม้การเปลี่ยนแปลงเหล่านั้นอาจไม่รุนแรงหรือสุดโต่งในระดับเดียวกับ “การปฏิวัติทางวิทยาศาสตร์” (Kuhn, 1972) ซึ่งกระบวนทัศน์ใหม่เข้ามาแทนที่กระบวนทัศน์เก่า ดังเช่นที่นักวิทยาศาสตร์เปลี่ยนความคิดเกี่ยวกับการเผาไหม้ รูปร่างของโลก และธรรมชาติของเสียง ในทางตรงข้าม การเปลี่ยนแปลงความรู้ทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นอย่างค่อยๆ ไปค่อยๆ Nikolantonakis (2007) ได้ยกตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงความรู้ทางคณิตศาสตร์ในอดีตที่น่าสนใจ หนึ่งในนั้นคือการเปลี่ยนแปลงความรู้เกี่ยวกับระบบตัวเลข ในยุคกรีกโบราณ นักคณิตศาสตร์ใช้สัญลักษณ์แทนตัวเลข 1-10 ดังภาพ 1 เมื่อตัวเลขมีจำนวนมากขึ้น ชาวกรีกโบราณจึงใช้วิธีการรวมสัญลักษณ์เหล่านั้นขึ้นเป็นสัญลักษณ์ใหม่ ดังภาพ 2 ดังนั้น สัญลักษณ์ XXXHHHII จึงหมายถึง 3,257 (สามพันสองร้อยห้าสิบเจ็ด) ระบบตัวเลขเช่นนี้ค่อนข้างสร้างความลำบาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่มีการบวกและการลบ



ภาพ 1 สัญลักษณ์ที่แทนตัวเลข 1-10 ของชาวกรีกโบราณ

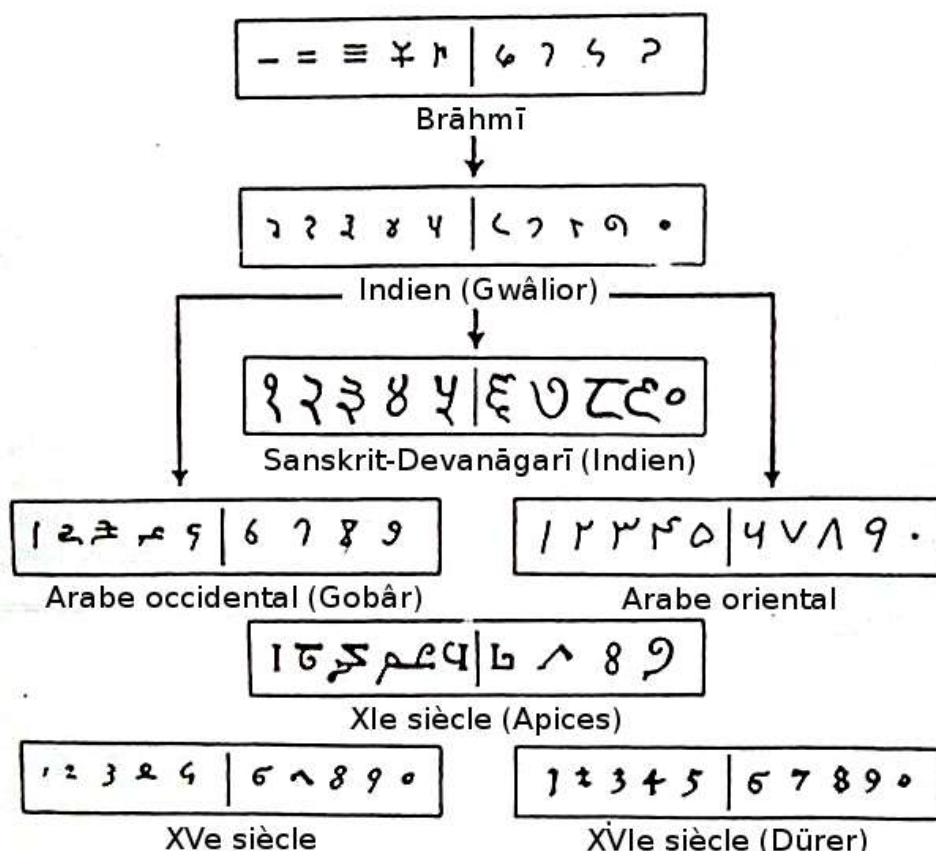
ที่มา: Major & Laughy (n.d.)



ภาพ 2 สัญลักษณ์ที่เกิดจากการรวมสัญลักษณ์พื้นฐานของชาวกรีกโบราณ

ที่มา: Major & Laughy (n.d.)

แต่เมื่อชาวกรีกโบราณได้มีการติดต่อกับชาวอาหรับ ซึ่งใช้ระบบตัวเลขที่มีพื้นฐานมาจากระบบตัวเลขของชาวอินเดีย ดังภาพ 3 โดยระบบตัวเลขของชาวอินเดียมีการกำหนดสัญลักษณ์เฉพาะให้กับเลข 2 3 และ 4 ที่แตกต่างไปจากสัญลักษณ์สำหรับเลข 1 (ไม่ใช่การใช้สัญลักษณ์ I เข้าไปตามจำนวนที่เพิ่มขึ้น) และมีการกำหนดสัญลักษณ์เฉพาะให้เลข 6 7 8 และ 9 ที่แตกต่างไปจากสัญลักษณ์สำหรับเลข 5 (ไม่ใช่การใช้สัญลักษณ์ Γ แต่เพิ่มจำนวนสัญลักษณ์ I ไปตามจำนวนที่เพิ่มขึ้น) เมื่อสัญลักษณ์เหล่านี้ถูกใช้ร่วมกับตำแหน่งที่แทนหลักสิบ หลักร้อย หลักพัน หลักหมื่น หลักแสน และหลักล้าน การบวกและการลบตัวเลขตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไปจึงมีความสะดวกมากขึ้น ดังที่ปรากฏในระบบตัวเลขอารบิกในปัจจุบัน การเปลี่ยนแปลงระบบตัวเลขเช่นนี้เป็นสิ่งที่แสดงให้เห็นว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งชั่วคราวที่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ อย่างไรก็ตาม การเปลี่ยนแปลงเหล่านี้ใช้ว่าจะเกิดขึ้นตามอำเภอใจหรืออย่างไรทิศทาง ในทางตรงกันข้าม การเปลี่ยนแปลงเหล่านี้เกิดขึ้นในทิศทางที่สอดคล้องกับความต้องการ ค่านิยม หรือวัตถุประสงค์ทางสังคม ณ ช่วงเวลาหนึ่ง (เช่น วัตถุประสงค์ทางการค้า) ซึ่งสะท้อนถึงลักษณะทางสังคมและวัฒนธรรมของธรรมชาติของคณิตศาสตร์

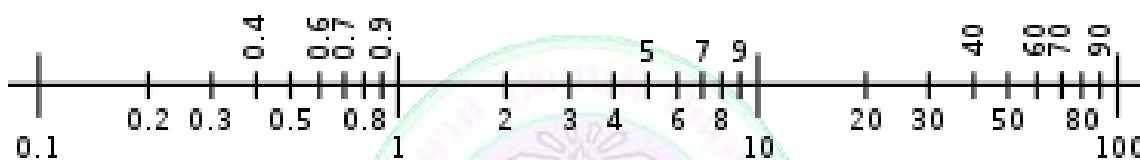


ภาพ 3 อิทธิพลของระบบตัวเลขของชาวอินเดียต่อระบบตัวเลขอารบิก

ที่มา: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Numeration-brahmi_fr.png

5. ลักษณะเชิงสร้างสรรค์ (Creative aspect)

การพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์บ่อยครั้งจำเป็นต้องอาศัยความคิดสร้างสรรค์ Torrance (1965) ได้นิยามความคิดสร้างสรรค์ไว้ว่าเป็นการแก้ปัญหาในรูปแบบหนึ่งที่ต้องอาศัยความคิดริเริ่มหรือวิธีการที่ไม่เคยปรากฏขึ้นมาก่อน ในการนี้ Gonzalez-Valasco (2010) ได้บันทึกเหตุการณ์สำคัญที่แสดงถึงการใช้ความคิดสร้างสรรค์ในการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องต่าง ๆ อาทิ ตรีโกณมิติ ลอการิทึม จำนวนเชิงซ้อน อนุกรมอนันต์ และแคลคูลัส ในกรณีของลอการิทึมนั้น วิธีการปกติที่นักคณิตศาสตร์ในอดีตคุ้นเคยคือการเขียนกราฟที่สเกลหรือช่องบนแกนของกราฟนั้นมีค่าเท่ากันทั้งหมด ซึ่งมีข้อจำกัดที่ทำให้กราฟนั้นไม่สามารถแสดงข้อมูลที่มีค่าแตกต่างกันมากได้อย่างชัดเจน ข้อจำกัดนี้ถูกแก้ด้วยวิธีการที่สร้างสรรค์โดยการกำหนดให้สเกลหรือช่องบนแกนของกราฟเพิ่มขึ้นครั้งละ 10 เท่า จาก 0.1 ไปเป็น 1 ไปเป็น 10 และไปเป็น 100 ตามลำดับ ดังภาพ 4 ด้วยวิธีการที่สร้างสรรค์นี้ นักคณิตศาสตร์จึงมีเครื่องมือใหม่ในการเขียนกราฟและการคำนวณตัวแปรที่มีความสัมพันธ์แบบเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งในเวลาต่อมาได้กลายเป็นเครื่องมือที่นักวิทยาศาสตร์ใช้ในการทำความเข้าใจปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ อาทิ ความถี่ของการเกิดแผ่นดินไหวในแต่ละบริเวณ และอัตราการเพิ่มขึ้นของสิ่งมีชีวิตในประชากร เป็นต้น



ภาพ 4 สเกลของลอการิทึม

ที่มา: https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_scale

6. ลักษณะทางสังคมและวัฒนธรรม (Sociocultural aspect)

เช่นเดียวกับการพัฒนาความรู้ทางวิทยาศาสตร์ การพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นในบริบททางสังคมและวัฒนธรรม ดังนั้น คณิตศาสตร์ สังคม และวัฒนธรรมจึงมีปฏิสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ดังตัวอย่างที่ผู้เขียนนำเสนอไปก่อนหน้านี้ ปัจจัยทางสังคมส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงการใช้ระบบตัวเลข ซึ่งเมื่อการเปลี่ยนแปลงนี้เกิดขึ้นแล้ว ระบบตัวเลขอารบิกได้กลายเป็นระบบตัวเลขสากลที่ผู้คนทั่วโลกใช้ร่วมกัน แต่กระนั้นก็ตาม ปัจจัยทางสังคมและวัฒนธรรมก็อาจส่งผลกระทบต่อคณิตศาสตร์ ดังเช่นในกรณีที่ชาวอินเดียในปัจจุบันก็ยังใช้ระบบตัวเลขที่แตกต่างจากระบบตัวเลขสากล โดยชาวอินเดียจะนับตัวเลข 382405765 ว่า “สามสิบแปดครอร์(สิบล้าน) ยี่สิบสี่ลัคค์(แสน) ห้าพัน เจ็ดร้อยหกสิบห้า” (38,24,05,765) ในขณะที่ระบบตัวเลขสากลจะมีการนับตัวเลขเดียวกันนี้ว่า “สามร้อยแปดสิบล้าน สี่แสนห้าพัน เจ็ดร้อยหกสิบห้า” (382,405,765) ในทำนองเดียวกัน แม้ระบบสากลจะมีหน่วยพื้นที่เป็นตารางเมตร แต่คนไทยก็ยังใช้ตารางวาเป็นหน่วยพื้นที่ในบางกรณี ดังนั้น ตัวอย่างเหล่านี้แสดงให้เห็นว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์อาจเปลี่ยนแปลงสิ่งที่เกิดขึ้นในสังคมและวัฒนธรรมของผู้คน แต่ในขณะเดียวกัน สิ่งที่เกิดขึ้นในสังคมและวัฒนธรรมก็อาจจำกัดการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้เช่นเดียวกัน

ข้อเสนอแนะ

ในบทความนี้ ผู้เขียนได้นำลักษณะสำคัญ 6 ของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในการบ่งชี้ลักษณะสำคัญของธรรมชาติของคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย 1. ลักษณะเชิงประจักษ์ 2. ลักษณะเชิงอนุมาน 3. ลักษณะเชิงอภิปรัชญา 4. ลักษณะที่ไม่จีรัง 5. ลักษณะเชิงสร้างสรรค์ และ 6. ลักษณะทางสังคมและวัฒนธรรม ผลการวิเคราะห์ปรากฏว่า คณิตศาสตร์มีลักษณะที่สอดคล้องกับลักษณะสำคัญเหล่านี้ทุกประการ ทั้งนี้ส่วนหนึ่งเพราะคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มีความสัมพันธ์กัน และทั้งสองศาสตร์มีค่านิยมหลายประการร่วมกัน (AAAS, 1990) เนื่องจากลักษณะสำคัญเหล่านี้สะท้อนการสร้างความรู้ตาม

ทฤษฎีสรณินิยมทางสังคม ผลการวิเคราะห์นี้จึงสนับสนุน “แนวคิดภายใน” (Dossey, 1992) ที่มองว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นตัวแทนภายในจิตใจที่มนุษย์สร้างขึ้นเพื่อแทนสิ่งที่เกิดขึ้นในโลกภายนอก ด้วยเหตุนี้ คณิตศาสตร์ควรถูกมองให้เป็น “ภาพที่ผลิตพลาดได้” มากกว่า “ภาพที่สมบูรณ์” (Ernest, 1996) หรือในอีกความหมายหนึ่ง ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้นและตรวจสอบด้วยกระบวนการทางสังคม มากกว่าเป็นสิ่งที่อยู่มาจากการค้นพบของมนุษย์ ดังนั้น แม้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในปัจจุบันจะมีความแน่นอนในระดับหนึ่ง แต่ความรู้ทางคณิตศาสตร์จึงสามารถเปลี่ยนแปลงได้เฉกเช่นเดียวกับความรู้ในศาสตร์สาขาอื่น

เนื่องจากครูจำนวนหนึ่งมักมีความเชื่อว่า ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่แน่นอนตายตัว ครูจึงมีแนวโน้มที่จะสอนความรู้ทางคณิตศาสตร์ผ่านการถ่ายทอดโดยตรง (Stipek et al., 2001) แต่บทความนี้ได้นำเสนอผลการวิเคราะห์ที่ท้าทายความเชื่อดังกล่าว ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น ดังนั้น ครูจึงควรจัดการเรียนการสอนที่เน้นให้นักเรียนได้สร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ผ่านกระบวนการสืบเสาะทางคณิตศาสตร์ (AAAS, 1990) ทั้งนี้งานวิจัยด้านวิทยาศาสตร์ศึกษาให้ข้อเสนอแนะว่า ความเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติของวิทยาศาสตร์สามารถส่งเสริมให้นักเรียนทำและเรียนรู้จากกิจกรรมการสืบเสาะทางวิทยาศาสตร์ได้อย่างมีความหมาย หากครูอภิปรายลักษณะสำคัญของธรรมชาติของวิทยาศาสตร์กับนักเรียน (Abd-El-Khalick, Bell, & Lederman, 1998; Akerson, Abd-El-Khalick, & Lederman, 2000; Schwartz & Lederman, 2002; Schwartz, Lederman, & Crawford, 2004; Akerson & Volrich, 2006) ดังนั้น หากข้อเสนอแนะนี้เป็นจริงในกรณีของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ความเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติของคณิตศาสตร์ก็อาจช่วยส่งเสริมการเรียนรู้จากกิจกรรมการสืบเสาะทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมายด้วยเช่นกัน

ตัวอย่างเช่น แทนที่ครูจะนำเสนอความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีความเป็นนามธรรมสูง ครูอาจนำเสนอโจทย์ปัญหาที่เกิดขึ้นได้จากประสบการณ์ของนักเรียนและมีความเชื่อมโยงกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ จากนั้น ครูจึงเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แปลงโจทย์ปัญหาในชีวิตประจำวันให้อยู่ในรูปแบบของตัวแทนหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนสามารถใช้ตรรกะร่วมกันความคิดสร้างสรรค์ในการจัดกระทำและลงข้อสรุปหาคำตอบได้ ทั้งนี้คำตอบและวิธีหาคำตอบของนักเรียนอาจมีได้มากกว่า 1 คำตอบหรือ 1 วิธี จนเมื่อนักเรียนได้คำตอบทางคณิตศาสตร์แล้ว ครูจึงเปิดโอกาสให้นักเรียนนำคำตอบทางคณิตศาสตร์นั้นไปประยุกต์ใช้กับประสบการณ์ในชีวิตประจำวันหรือในสังคมของตนเอง ข้อเสนอแนะนี้อาจไม่ใช่เรื่องใหม่ ทั้งนี้เพราะมันสอดคล้องกับนโยบายทางการศึกษา (AAAS, 1990) และแนวทางการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ก่อนหน้านี้ อาทิ วิธีการแบบเปิด (ทิพย์รัตน์ นพฤทธิ์ และ เจนสมุทร แสงพันธ์, 2557) แต่สิ่งใหม่ที่บทความนี้เสนอแนะคือว่า ในระหว่างที่นักเรียนกำลังทำการสืบเสาะทางคณิตศาสตร์หรือแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการแบบเปิด การอภิปรายและเน้นย้ำเกี่ยวกับลักษณะสำคัญ 6 ประการอาจช่วยให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมายและสอดคล้องกับญาณวิทยาของคณิตศาสตร์มากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- ทิพย์รัตน์ นพฤทธิ์ และ เจนสมุทร แสงพันธ์. (2557). ธรรมชาติของความรู้ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสอนของนักศึกษาครูในโรงเรียนที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด. *วิทยาสารเกษตรศาสตร์ (สังคมศาสตร์)*, 35(2), 245-256.
- ลือชา ลดาชาติ. (2561). *การเรียนการสอนวิทยาศาสตร์ที่เป็นวิทยาศาสตร์: ประวัติศาสตร์ ปรัชญา และการศึกษา*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ลือชา ลดาชาติ และ ลฎาภา ลดาชาติ. (2560ก). การสร้างแผนภาพความเข้าใจธรรมชาติของวิทยาศาสตร์ของผู้เรียน. *ศึกษาศาสตร์สาร มหาวิทยาลัยเชียงใหม่*, 1(1), 6-16.
- ลือชา ลดาชาติ และ ลฎาภา ลดาชาติ. (2560ข). ทฤษฎีความผันแปร: อภิปรายเกี่ยวกับการเรียนรู้. *ศึกษาศาสตร์สาร มหาวิทยาลัยเชียงใหม่*, 1(2), 37-51.
- ลือชา ลดาชาติ, ลฎาภา สุทธิกุล, และ ชวตรี ฝ่ายคำตา. (2556). ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างการส่งเสริมการเรียนการสอน “ธรรมชาติของวิทยาศาสตร์” ภายนอกและภายในประเทศไทย. *วิทยาสารเกษตรศาสตร์ (สังคมศาสตร์)*, 34(2), 269-282.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2545). *พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 (แก้ไขเพิ่มเติม พ.ศ. 2545)*. กรุงเทพฯ: บริษัทพริกหวานกราฟฟิค จำกัด.
- Abd-El-Khalick, F., Bell, R. L., & Lederman, N. G. (1998). The nature of science and instructional practice: Making the unnatural natural. *Science Education*, 82(4), 417-436.
- Akerson, V. L., Abd-El-Khalick, F., & Lederman, N. G. (2000). Influence of a reflective explicit activity-based approach on elementary teachers' conceptions of nature of science. *Journal of Research in Science Teaching*, 37(4), 295-317.
- Akerson, V. L. & Volrich, M. (2006). Teaching nature of science explicitly in a first-grade internship setting. *Journal of Research in Science Teaching*, 43(4), 377-394.
- American Association for the Advancement of Science. (1990). *The nature of mathematics*. Retrieved from <http://www.project2061.org/publications/sfaa/online/chap2.htm>
- Christiansen, B. (1969). Induction and deduction in the learning of mathematics and in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, 2(2/3), 139-159.
- Dewey, L. (1910). *How we think*. New York: DC: Heath & Co Publishers.
- Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 39-48). New York: MacMillan.
- Edwards, L. D. (2003, February). *The nature of mathematics as viewed from cognitive science*. In M. A. Mariotti (Ed.), *Paper presented at the 3rd congress of the European society of research in mathematics*. Organized by European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.
- Ernest, P. (1992). The Nature of mathematics: Towards a social constructivist account. *Science and Education*, 1(1), 89-100.
- Ernest, P. (1993a). Are there revolutions in mathematics. *Humanistic Mathematics Network Journal*, 8(21), 63-65.

- Ernest, P. (1993b). Constructivism, the psychology of learning, and the nature of mathematics: Some critical issues. *Science and Education*, 2(1), 87-93.
- Ernest, P. (1996). *The nature of mathematics and teaching*. Retrieved from http://www.academia.edu/download/31378390/THE_NATURE_OF_MATHEMATICS_AND_TEACHING.doc.
- Gonzalez-Valasco, E. A. (2010). *Journey through mathematics: Creative episodes in its history*. New York: Springer.
- Kean, L. (2017). Using beliefs about the nature of mathematical knowledge in teaching college algebra. In B. Gold, C. E. Behrens, & R. A. Simons. (Eds.), *Using the philosophy of mathematics in teaching undergraduate mathematics* (pp. 63-72). Washington, DC.
- Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolution*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Lakoff, G. & Nunez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basics Books.
- Lerman, S. (1990). Alternative perspectives of the nature of mathematics and their influence on the teaching of mathematics. *British Educational Research Journal*, 16(1), 53-61.
- Major, W. E. & Laughy, M. (n.d.). *Ancient Greek for everyone: Adverbs and numbers*. Retrieved from <https://ancientgreek.pressbooks.com/chapter/33/>
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge Falmer.
- Nikolantonakis, K. (2007, July). Did we have “revolutions” in mathematics? Examples from the history of mathematics in the light of T. S. Kuhn’s historical philosophy of science. In E. Barbin, N. Stehlikova, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the 5th European summer university*. Organized by Mathematical Association of America, Prague, Czech Republic.
- Nunez, R. F. (2000, July). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Nakahara, & M. Koyama (Eds.), *Paper presented at the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education*. Organized by International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hiroshima, Japan.
- Pair, J. D. (2018, February). The creation of a humanistic educational framework for the nature of pure mathematics. In A. Weinberg, C. Rasmussen, J. Rabin, M. Wawro, & S. Brown (Eds.), *Proceedings of at the 21st annual conference on research on undergraduate mathematics education*. Organized by the Special Interest Group of the Mathematical Association of America (SIGMAA) for Research in Undergraduate Mathematics Education, San Diego, CA.
- Schwartz, R. S. & Lederman, N. G. (2002). “Its’ the nature of the beast”: The influence of knowledge and intentions on learning and teaching nature of science. *Journal of Research in Science Teaching*, 39(3), 205-236.
- Schwartz, R. & Lederman, N. (2008). What scientists say: Scientists’ views of nature of science and relation to science context. *International Journal of Science Education*, 30(6), 727-771.

- Schwartz, R. S., Lederman, N. G., & Crawford, B. A. (2004). Developing views of nature of science in an authentic context: An explicit approach to bridging the gap between nature of science and scientific inquiry. *Science Education*, 88(4), 610-645.
- Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education*, 17(2), 213-226.
- Torrance, E. P. (1965). Scientific views of creativity and factors affecting its growth. *Daedalus*, 94(3), 663-681.

