

การศึกษาความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด
ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์

A Study of Mathematical Conceptual Understanding of Limits of Functions in
Indeterminate Forms Based on the APOS Theory among Undergraduate
Students at the Faculty of Science and Technology, Princess of Naradhiwas
University

นนทกร ประชุมกาเยาะมาต^{1*}
Nonttakorn Prachumkayohmat^{1*}

¹ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์
(Faculty of Science and Technology, Princess of Naradhiwas University)

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด และวิเคราะห์ลักษณะของความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้านเนื้อหา ด้านการดำเนินการ และด้านความสัมพันธ์ ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์ โดยใช้กรอบทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991) และแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 30 ข้อ และงานปฏิบัติ จำนวน 5 ข้อ ร่วมกับการสัมภาษณ์เชิงลึกโดยใช้งานปฏิบัติเป็นฐาน นักศึกษาที่เข้าร่วมการวิจัยเป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 1 และ 2 จำนวน 40 คน ซึ่งได้จากการเลือกแบบเจาะจง และคัดเลือกนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย จำนวน 6 คน จากกลุ่มเก่ง กลุ่มปานกลาง และกลุ่มอ่อน เพื่อให้ข้อมูลเชิงลึกจากการทำงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์ ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษามีคะแนนเฉลี่ยรวมเท่ากับ 19.50 จากคะแนนเต็ม 30 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 65.00 ซึ่งอยู่ในระดับดี เมื่อพิจารณาระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ตามกรอบทฤษฎี APOS พบว่า ผู้เรียนส่วนใหญ่อยู่ในระดับการกระทำและระดับกระบวนการ สะท้อนว่าผู้เรียนมักอาศัยการแทนค่าและการดำเนินการตามขั้นตอนมากกว่าการพิจารณาโครงสร้างของนิพจน์ จากการวิเคราะห์งานปฏิบัติและการสัมภาษณ์เชิงลึก พบว่า ผู้เรียนในระดับการกระทำและระดับกระบวนการแสดงความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้านเนื้อหา การดำเนินการ และความสัมพันธ์ผ่านการแทนค่า การใช้สูตร หรือการทำตามวิธีที่คุ้นเคยเป็นหลัก ในขณะที่ผู้เรียนในระดับสิ่งที่เรียนรู้และระดับโครงสร้างความคิดสามารถวิเคราะห์โครงสร้างของนิพจน์ อธิบายเหตุผลของวิธีการ และเชื่อมโยงแนวคิดลิมิต ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ได้สอดคล้องกับโครงสร้างของแนวคิด ผลการวิจัยแสดงให้เห็นว่า การใช้กรอบทฤษฎี APOS ร่วมกับองค์ประกอบของความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ช่วยอธิบายลักษณะการคิดและการให้เหตุผลของผู้เรียนเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนดได้อย่างเป็นระบบ

คำสำคัญ: ลิมิตของฟังก์ชัน รูปแบบไม่กำหนด ทฤษฎี APOS ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ABSTRACT

This study aimed to examine levels of mathematical conceptual understanding of limits of functions in indeterminate forms and to analyze characteristics of conceptual understanding in terms of content, procedural, and relational aspects among undergraduate students in the Faculty of Science and Technology, Princess of Naradhiwas University. The study was grounded in the APOS framework proposed by Dubinsky (1991) and the conceptual understanding framework of Kilpatrick et al. (2001). The research instruments comprised a 30-item Mathematical Conceptual Understanding Test and five task-based performance tasks, complemented by task-based in-depth interviews. The participants were 40 first- and second-year undergraduate students selected through purposive selection, and six target students from high, medium, and low achievement groups were selected to provide in-depth qualitative data. The results indicated a mean total score of 19.50 out of 30 (65.00%), which was classified as a good level. According to the APOS framework, most students were classified at the Action and Process levels, reflecting a tendency to rely on substitution and procedural execution rather than structural analysis of expressions. Findings from task-based performances and interviews further showed that students at the Action and Process levels demonstrated conceptual understanding of content, procedures, and relationships mainly through substitution, formula use, or familiar methods, whereas students at the Object and Schema levels were able to analyze the structure of expressions, justify solution methods, and coherently connect the concepts of limits, continuity, and derivatives in accordance with the underlying mathematical structure. Overall, the findings suggest that integrating the APOS framework with components of mathematical conceptual understanding provides a systematic account of students' thinking and reasoning about limits of functions in indeterminate forms.

KEYWORDS: Limits of Functions, Indeterminate Forms, APOS Theory, Mathematical Conceptual Understanding

**Corresponding author, E-mail: Nonttakorn.p@pnu.ac.th Tel. 073-709-030*

Received: 3 December 2025 /Revised: 6 February 2026 /Accepted: 27 February 2026 /Published online: 28 April 2026

บทนำ

ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ถือเป็นองค์ประกอบสำคัญของการเรียนรู้ในทุกกระดับ เนื่องจากคณิตศาสตร์ไม่ได้เป็นเพียงศาสตร์แห่งการคำนวณหรือการใช้สูตร แต่เป็นเครื่องมือสำคัญในการพัฒนาทักษะการคิดอย่างมีเหตุผลและการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันอย่างมีประสิทธิภาพ (National Research Council, 2001) อีกทั้งยังเป็นรากฐานสำคัญของทักษะการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 (Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD), 2018) ซึ่งเน้นการบูรณาการองค์ความรู้กับการประยุกต์ใช้ในบริบทที่หลากหลาย อย่างไรก็ตาม การส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจเชิงลึกในคณิตศาสตร์ยังคงเป็นความท้าทายของผู้สอน (Hiebert & Carpenter, 1992) เนื่องจากผู้เรียนจำนวนมากไม่เพียงแต่มีความเข้าใจจำกัด โดยอาศัยการจดจำสูตรหรือทำตามขั้นตอน โดยขาดการเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง และไม่สามารถอธิบายเหตุผลเชิงลึกที่แสดงถึงความเข้าใจของตนเองได้ (Sierpiska, 1994; Skemp, 1976) ปัญหานี้ยังซับซ้อนเมื่อผู้เรียนต้องเรียนรู้หัวข้อที่ยาก เช่น ลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นพื้นฐานของคณิตศาสตร์ระดับสูง และเป็นจุดเริ่มต้นของแนวคิดแคลคูลัสที่มีบทบาทสำคัญในสาขาวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ (Tall, 1993) ทั้งนี้ National Research Council

(2001) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับพื้นฐานเพื่อวางรากฐานสำหรับการเรียนรู้ในระดับสูงต่อไป

หนึ่งในคำถามสำคัญที่ได้รับความสนใจในวงการคณิตศาสตร์ศึกษา นั่นก็คือ ความเข้าใจคืออะไร และผู้สอนจะสามารถจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจได้อย่างไร คำถามเหล่านี้ถูกหยิบยกขึ้นมาศึกษาและอภิปรายอย่างต่อเนื่องโดยนักวิชาการด้านคณิตศาสตร์ศึกษา นักพัฒนาหลักสูตร และครูผู้สอน ซึ่งนำไปสู่การเคลื่อนไหวที่ส่งเสริมให้เกิดการเสนอแนวทางในการพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ที่สามารถนำไปใช้ได้จริงในบริบทของห้องเรียน (Damsubhan, 2015) นอกจากนี้ การจัดการเรียนรู้ที่เน้นการเชื่อมโยงกับการปฏิบัติจริงมีส่วนสำคัญในการส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจเชิงลึกในแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ที่ได้นั้นไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ ในขณะเดียวกัน การประเมินผลการเรียนรู้ควรมุ่งเน้นการตรวจสอบความเข้าใจของผู้เรียนในเชิงความคิด เช่น การให้ผู้เรียนอธิบายเหตุผลหรือกระบวนการคิดที่อยู่เบื้องหลังการเลือกวิธีในการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นแนวทางที่สะท้อนความเข้าใจเชิงมนทัศน์อย่างแท้จริง (Schoenfeld, 2023) ดังนั้น การจัดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพควรออกแบบกิจกรรมที่กระตุ้นการคิดวิเคราะห์ และเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้นำความเข้าใจของตนไปใช้ในการแก้ปัญหาที่พบในชีวิตจริง

Kilpatrick et al. (2001) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ในหนังสือ *Adding It Up* ของสภาวิจัยแห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Research Council) โดยระบุว่า ความเข้าใจเชิงมนทัศน์ (Conceptual Understanding) เป็นหนึ่งในห้าองค์ประกอบของความสามารถทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Proficiency) และเป็นสมรรถนะพื้นฐานที่สำคัญที่ผู้เรียนควรได้รับการส่งเสริม นักวิจัยหลายท่านเห็นพ้องว่าความเข้าใจเชิงมนทัศน์มีบทบาทสำคัญในการช่วยให้ผู้เรียนเชื่อมโยงและประยุกต์ใช้ความรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ (Hiebert & Carpenter, 1992) ขณะเดียวกัน Fatqurohman (2016) กล่าวว่า การมีความเข้าใจเชิงมนทัศน์จะช่วยลดความผิดพลาดในการแก้โจทย์คณิตศาสตร์ได้ นอกจากนี้ สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000) เน้นย้ำว่า ความเข้าใจเชิงมนทัศน์ช่วยให้ผู้เรียนเห็นความเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนำไปสู่การอธิบายเหตุผลและการคิดอย่างเป็นระบบมากขึ้น จากแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยองค์ประกอบหลัก 3 ด้าน ได้แก่ 1) ด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Content Understanding) 2) ด้านการดำเนินการหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์ (Procedural Understanding) และ 3) ด้านความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ (Relational Understanding) องค์ประกอบทั้ง 3 ด้านนี้เป็นรากฐานสำคัญของการพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง ซึ่งช่วยให้ผู้เรียนแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ส่งเสริมการคิดอย่างมีระบบ และนำไปสู่การเรียนรู้ในระดับสูงต่อไป

ทฤษฎี APOS ซึ่งนำเสนอโดย Dubinsky (1991) ได้รับการยอมรับอย่างแพร่หลายในวงการคณิตศาสตร์ศึกษา เนื่องจากเป็นทฤษฎีที่อธิบายพัฒนาการของความเข้าใจเชิงมนทัศน์อย่างเป็นระบบ โดยพัฒนาจากแนวคิดการคิดสะท้อน (Reflective Abstraction) ของ Piaget (1970) ซึ่งช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาความเข้าใจจากระดับรูปธรรมสู่ระดับนามธรรมผ่านกระบวนการคิดภายใน ทฤษฎีนี้แบ่งความเข้าใจออกเป็น 4 ระดับ ได้แก่ การกระทำ (Action) กระบวนการ (Process) สิ่งการเรียนรู้ (Object) และโครงสร้างความคิด (Schema) ซึ่งสะท้อนการพัฒนาเชิงลำดับขั้นของการเรียนรู้ (Dubinsky, 1991) ต่อมาทฤษฎีนี้ได้รับการต่อยอดในระดับอุดมศึกษา (Dubinsky & McDonald, 2001) และถูกนำไปใช้ในการวิจัยและการเรียนการสอนในหลายบริบททั่วโลก (Arnon et al., 2014) เพื่อจำแนกระดับพฤติกรรมการเรียนรู้ โดยเฉพาะหัวข้อที่ซับซ้อน เช่น ลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ทั้งนี้ ทฤษฎี APOS ยังเป็นกรอบที่ส่งเสริมการคิดวิเคราะห์อย่างเป็นระบบและการประยุกต์ใช้ความรู้ในบริบทจริง สอดคล้องกับเป้าหมายการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 และเป็นเครื่องมือสำคัญในการประเมินและพัฒนา ระดับความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Prachumkayohmat et al., 2020)

ลิมิตของฟังก์ชันเป็นหัวข้อสำคัญในวิชาคณิตศาสตร์ที่นักศึกษาระดับอุดมศึกษาจำเป็นต้องทำความเข้าใจอย่างลึกซึ้ง เนื่องจากเป็นพื้นฐานของแนวคิดแคลคูลัสและการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ หัวข้อนี้มีความซับซ้อนสูงและต้องอาศัยฐานความรู้เดิมในการตีความแนวคิดของการหาแนวโน้มของฟังก์ชันเมื่อค่าของตัวแปรเข้าใกล้ค่าหนึ่งหรือมีค่าเข้าใกล้อนันต์ ผู้เรียนจำนวนมากมักสับสนกับนิยามลิมิต โดยเฉพาะเมื่อฟังก์ชันอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด ในกรณี $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งไม่สามารถคำนวณได้โดยตรง ผู้เรียนมักใช้การแทนค่าฟังก์ชันโดยไม่เข้าใจว่าจำเป็นต้องใช้เทคนิคทางพีชคณิต เช่น การแยกตัวประกอบ การคูณด้วยสังยุค (Conjugate) ของพจน์ดีตราก การจัดรูปสมการใหม่ หรือใช้กฎโลปีตาล (L'Hôpital's Rule) เพื่อให้หาค่าลิมิตได้อย่างถูกต้อง แม้จะมีเทคนิคหลากหลายที่ช่วยให้การคำนวณลิมิตง่ายขึ้น แต่นักศึกษาจำนวนมากไม่น้อยยังรู้สึกว่ายากต่อการเลือกใช้วิธีที่เหมาะสม และมักเข้าใจแนวคิดลิมิตอย่างคลาดเคลื่อน โดยมองว่าการหาค่าลิมิตเป็นเพียงการแทนค่าในฟังก์ชันโดยตรง ปัญหานี้ยังเห็นได้ชัดเมื่อผู้เรียนไม่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดลิมิตกับการประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงหรือในบริบทของแคลคูลัสได้ ซึ่งสะท้อนการขาดความเข้าใจเชิงนิเทศทางคณิตศาสตร์ งานวิจัยหลายชิ้นที่ยืนยันปัญหานี้ จากการศึกษาของ Weldeana et al. (2023) พบว่า นักศึกษา STEM ชั้นปีที่ 1 ส่วนใหญ่ยังมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนในโจทย์ลิมิตพื้นฐาน โดยเฉพาะในกรณีที่เกี่ยวข้องกับ $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x / x)$ แม้ว่าผ่านการเรียนหัวข้อนี้มาแล้วก็ตาม ขณะที่ Przeniosło (2004) รายงานว่า นักศึกษาในระดับอุดมศึกษาหลายคนยังคงมองแนวคิดลิมิตเป็นเพียงการแทนค่า a ลงในฟังก์ชัน f หรือหาค่าของ $f(a)$ มากกว่าการมองว่าลิมิตเป็นแนวคิดที่อธิบายแนวโน้มของฟังก์ชันเมื่อค่าของตัวแปรเข้าใกล้ค่าหนึ่ง นอกจากนี้ Sulastri et al. (2022) พบว่า ข้อจำกัดด้านความเข้าใจเกี่ยวกับแนวคิดลิมิตและฟังก์ชันยังคงปรากฏให้เห็นในกลุ่มนักศึกษา แม้ในการเรียนการสอนผ่านระบบออนไลน์ ผลการศึกษาแสดงให้เห็นว่าความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับแนวคิดลิมิตยังคงแพร่หลายในระดับอุดมศึกษา และเป็นอุปสรรคต่อการพัฒนาความเข้าใจเชิงนิเทศทางคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง

จากเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยสนใจทำการศึกษาความเข้าใจเชิงนิเทศทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์ โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาระดับและวิเคราะห์ลักษณะของความเข้าใจเชิงนิเทศทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ทั้งกรณี $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ โดยใช้กรอบทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991) และวิเคราะห์ลักษณะของความเข้าใจเชิงนิเทศทางคณิตศาสตร์ ด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ และความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ผู้วิจัยเห็นว่าการศึกษาค้นคว้านี้จะช่วยอธิบายระดับการคิดของนักศึกษาได้อย่างลึกซึ้ง วิเคราะห์ความเข้าใจเชิงลึกเกี่ยวกับความเข้าใจเชิงนิเทศทางคณิตศาสตร์ พร้อมสร้างแนวทางใหม่ในการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษา

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจเชิงนิเทศทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 และ 2 สาขาวิทยาศาสตร์ทั่วไปและชีววิทยา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991)
2. เพื่อวิเคราะห์ลักษณะของความเข้าใจเชิงนิเทศทางคณิตศาสตร์ ด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ และความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ของนักศึกษาที่มีระดับความเข้าใจแตกต่างกันตามกรอบทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991)

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. ความเข้าใจเชิงนิเทศทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS หมายถึง ความสามารถของนักศึกษาในการแสดงความเข้าใจแนวคิดเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ทั้งกรณี $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งในการวิจัยนี้ วิเคราะห์จากการแสดงพฤติกรรมในงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์เชิงลึกรายบุคคล โดยจำแนกลักษณะของความเข้าใจเชิงนิเทศทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ด้าน ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ดังนี้

1.1 ด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Content Understanding) หมายถึง ความสามารถของนักศึกษาในการระบุลักษณะของฟังก์ชัน การจำแนกได้ว่าลิมิตที่กำหนดให้อยู่ในรูปแบบไม่กำหนดกรณีใด ทั้งกรณี $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ การอธิบายความหมายของลิมิต และแสดงความเข้าใจเกี่ยวกับรูปแบบของฟังก์ชันต่างๆ เช่น ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันราก (Radical Function) ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น

1.2 ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ (Procedural Understanding) หมายถึง ความสามารถของนักศึกษาในการเลือกใช่วิธีการหรือเทคนิคที่เหมาะสมในการหาลิมิต เช่น การแยกตัวประกอบ การคูณด้วยสังยุคของพจน์ดีตราก รวมถึงการใช้กฎโลปีตาล พร้อมทั้งดำเนินการแก้โจทย์ได้อย่างเป็นขั้นตอนและมีเหตุผล

1.3 ด้านความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ (Relational Understanding) หมายถึง ความสามารถของนักศึกษาในการเชื่อมโยงแนวคิดต่างๆ เข้าด้วยกัน เช่น การอธิบายว่าทำไมจึงใช้วิธีการนั้นในสถานการณ์ที่กำหนด หรือการอธิบายผลลัพธ์จากการหาลิมิตในเชิงโครงสร้างที่ลึกซึ้ง รวมถึงการสะท้อนความเข้าใจถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชันและแนวคิดเกี่ยวกับลิมิตในภาพรวม

2. แบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS (Mathematical Conceptual Understanding Test on Limits of Functions in Indeterminate Forms Based on APOS Theory) หมายถึง เครื่องมือที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อวัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ทั้งกรณี $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ ครอบคลุมระดับความเข้าใจ 4 ระดับ ตามกรอบทฤษฎี APOS ได้แก่ การกระทำ (Action) กระบวนการ (Process) สิ่งที่เรียนรู้ (Object) และโครงสร้างความคิด (Schema)

3. งานปฏิบัติ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS (Task-Based Performance Assessment on Limits of Functions in Indeterminate Forms Using APOS Theory) หมายถึง เครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์ลักษณะของความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ในเชิงลึกกับนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย จำนวน 6 คน ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยที่เป็นข้อคำถามปลายเปิด จำนวน 5 ข้อ ออกแบบตามลำดับของระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ที่พัฒนาโดย Dubinsky (1991)

กรอบแนวคิดการวิจัย การวิจัยนี้ใช้กรอบแนวคิดจาก 2 ทฤษฎีหลัก ได้แก่

1. กรอบทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991)

เพื่อใช้ในการศึกษาระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด โดยจำแนกระดับความเข้าใจออกเป็น 4 ระดับ ได้แก่ ระดับการกระทำ (Action) ระดับกระบวนการ (Process) ระดับสิ่งที่เรียนรู้ (Object) และระดับโครงสร้างความคิด (Schema) ซึ่งสะท้อนความแตกต่างของระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน

2. แนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001)

เพื่อวิเคราะห์ลักษณะของความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ 3 ด้าน ได้แก่ ด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Content Understanding) ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ (Procedural Understanding) และด้านความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ (Relational Understanding) โดยพิจารณาลักษณะการแสดงออกของความเข้าใจของผู้เรียนในแต่ละด้านภายใต้ระดับความเข้าใจที่แตกต่างกันตามกรอบทฤษฎี APOS

ในการวิจัยนี้ กรอบทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991) ใช้เป็นกรอบในการจัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน ขณะที่แนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ใช้ในการวิเคราะห์ลักษณะความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ใน 3 ด้าน ได้แก่ ด้านเนื้อหา ด้านการดำเนินการ และด้านความสัมพันธ์ โดยพิจารณาลักษณะการแสดงออกของผู้เรียนในแต่ละระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามทฤษฎี APOS

กระบวนการวิจัยเริ่มต้นด้วยการใช้แบบทดสอบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ เพื่อศึกษาระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ของนักศึกษา ตามกรอบทฤษฎี APOS และใช้ผลการทดสอบในการจำแนกผู้เรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มเก่ง กลุ่มปานกลาง และกลุ่มอ่อน จากนั้นคัดเลือกนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย จำนวน 6 คน (กลุ่มละ 2 คน) เพื่อเข้าสู่การศึกษาเชิงลึก โดยใช้งานปฏิบัติซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ ร่วมกับการสัมภาษณ์เชิงลึกโดยใช้งานปฏิบัติเป็นฐาน (Task-Based Interview) เพื่อนำข้อมูลที่ได้ไปวิเคราะห์ลักษณะของความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) มีรายละเอียด ดังภาพที่ 1

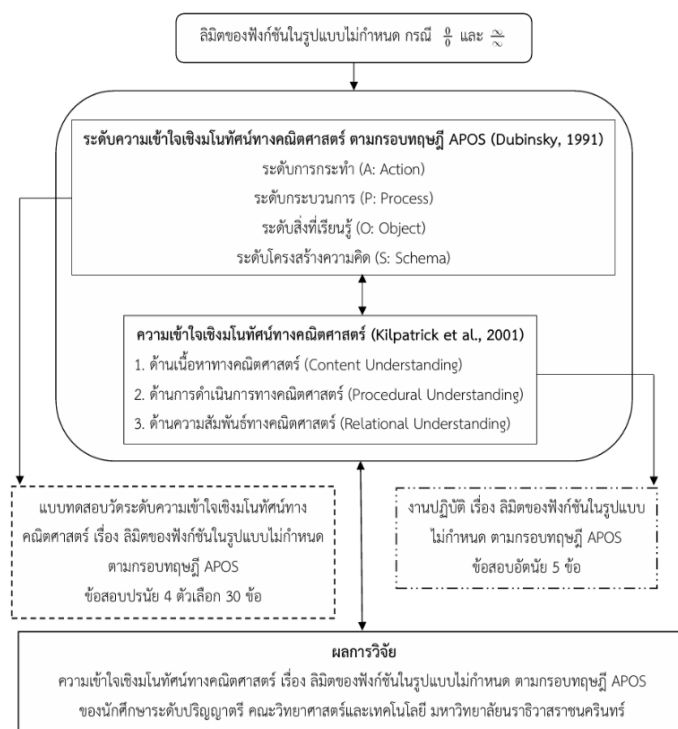


Figure 1 กรอบแนวคิดการวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษาความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ เรื่อง ลิขิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์ ผู้วิจัยได้ดำเนินการ ดังนี้

นักศึกษาที่เข้าร่วมการวิจัย และนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย

1. นักศึกษาที่เข้าร่วมการวิจัย ได้แก่ นักศึกษาระดับปริญญาตรีชั้นปีที่ 1 และ 2 สาขาวิทยาศาสตร์ทั่วไป และสาขาชีววิทยา คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์ ซึ่งผ่านการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์ที่มีเนื้อหาขีดของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนดมาแล้ว จำนวนทั้งสิ้น 40 คน การวิจัยครั้งนี้ดำเนินการในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2568 โดยใช้วิธีการคัดเลือกแบบเจาะจง (Purposive Selection) เพื่อให้ได้ผู้เข้าร่วมที่ตรงกับวัตถุประสงค์ของการวิจัย นักศึกษาทุกคนทำแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ เรื่อง ลิขิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS จำนวน 30 ข้อ เพื่อนำมาศึกษาและวิเคราะห์ระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ และใช้เป็นข้อมูลในการจำแนกผู้เรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มเก่ง (คะแนนสูงสุด 25%) กลุ่มปานกลาง (คะแนนช่วงกลาง 50%) และกลุ่มอ่อน (คะแนนต่ำสุด 25%) โดยพิจารณาจากคะแนนรวมของแบบทดสอบ

2. นักศึกษากลุ่มเป้าหมาย คือ ผู้ที่ถูกคัดเลือกจากนักศึกษากลุ่มเก่ง กลุ่มปานกลาง และกลุ่มอ่อน กลุ่มละ 2 คน รวมเป็น 6 คน โดยพิจารณาจากผลคะแนนแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ เรื่อง ลิขิตของฟังก์ชันใน

รูปแบบไม่กำหนด ที่พัฒนาขึ้นตามกรอบทฤษฎี APOS ซึ่งใช้ในการจำแนกผู้เรียนตามระดับความเข้าใจ ประกอบกับการพิจารณาความเหมาะสมในการเป็นตัวแทนของแต่ละกลุ่ม โดยเฉพาะด้านความสามารถในการสื่อสารและความตั้งใจในการมีส่วนร่วมในการวิจัย นักศึกษากลุ่มนี้จะเข้าสู่กระบวนการศึกษาเชิงลึก โดยทำงานปฏิบัติ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด จำนวน 5 ข้อ ซึ่งออกแบบตามกรอบทฤษฎี APOS ร่วมกับการสัมภาษณ์โดยใช้งานปฏิบัติเป็นฐาน เพื่อนำมาวิเคราะห์ลักษณะของความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ 3 ด้าน ได้แก่ ด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ (Content Understanding) ด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ (Procedural Understanding) และด้านความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ (Relational Understanding) ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ทั้งนี้ ข้อมูลที่ได้จากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์เชิงลึกจะได้รับการตรวจสอบความน่าเชื่อถือด้วยวิธีการตรวจสอบแบบ Triangulation โดยใช้การตรวจสอบจากแหล่งข้อมูลหลายประเภท (Data Triangulation) ได้แก่ ผลการทำงานปฏิบัติและคำอธิบายของผู้เรียนจากการสัมภาษณ์ เพื่อพิจารณาความสอดคล้องของลักษณะความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ตามกรอบทฤษฎี APOS นอกจากนี้ มีการตรวจสอบโดยผู้เข้าร่วม (Member Checking) เพื่อยืนยันความถูกต้องของการตีความข้อมูล

เครื่องมือวิจัย

ผู้วิจัยได้สร้างและหาคุณภาพเครื่องมือวิจัยผ่านการประเมินจากผู้เชี่ยวชาญจำนวน 5 ท่าน ประกอบด้วยผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ 1 ท่าน และคณิตศาสตร์ศึกษา 2 ท่าน ผู้เชี่ยวชาญด้านการวัดผลและสถิติการวิจัยทางการศึกษา 2 ท่าน ผู้เชี่ยวชาญดังกล่าวได้ร่วมกันพิจารณาความสอดคล้องระหว่างวัตถุประสงค์กับเนื้อหาของเครื่องมือแต่ละข้อ โดยใช้แบบประเมินค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) และให้ข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงเครื่องมือให้มีความเหมาะสมทั้งในด้านเนื้อหา ภาษา และรูปแบบ รายละเอียดของการสร้างและตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือทั้งสองฉบับ มีดังต่อไปนี้

1. แบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS เป็นแบบทดสอบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 30 ข้อ พัฒนาขึ้นตามลำดับขั้นของทฤษฎี APOS ได้แก่ ระดับการกระทำ (Action) ระดับกระบวนการ (Process) ระดับสิ่งที่เรียนรู้ (Object) และระดับโครงสร้างความคิด (Schema) โดยแบ่งจำนวนข้อในแต่ละระดับให้ครอบคลุมอย่างเหมาะสม ได้แก่ ระดับ Action จำนวน 8 ข้อ ระดับ Process จำนวน 7 ข้อ ระดับ Object จำนวน 8 ข้อ และระดับ Schema จำนวน 7 ข้อ แบบทดสอบผ่านการตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหาโดยผู้เชี่ยวชาญจำนวน 5 ท่าน พบว่า ทุกข้อมี IOC เท่ากับ 1.00 ภายหลังได้รับอนุมัติจริยธรรมการวิจัยในมนุษย์ ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบไปทดลองใช้ (Try-out) กับนักศึกษาที่ไม่ใช่กลุ่มที่เข้าร่วมการวิจัยจำนวน 30 คน เพื่อวิเคราะห์คุณภาพของแบบทดสอบ ผลการวิเคราะห์ พบว่า แบบทดสอบมีค่าความยาก (p) อยู่ระหว่าง 0.44-0.74 ค่าอำนาจจำแนก (r) ระหว่าง 0.32-0.43 และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ (KR-20) เท่ากับ 0.86 ซึ่งอยู่ในระดับสูง (Srisaard, 2017) แสดงว่าแบบทดสอบมีคุณภาพดีและเหมาะสมสำหรับการนำไปใช้เก็บข้อมูลจริง

ข้อคำถามในแบบทดสอบถูกออกแบบให้สะท้อนพฤติกรรมและความสามารถของนักศึกษาในแต่ละระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS สำหรับเนื้อหาลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด กล่าวคือ

ระดับการกระทำ (Action) นักศึกษาสามารถแทนค่าเพื่อพิจารณาพฤติกรรมของฟังก์ชันและระบุได้ว่าลิมิตที่กำหนดให้อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด เช่น กรณิ $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ โดยไม่ต้องหาลิมิต

ระดับกระบวนการ (Process) นักศึกษาสามารถเปลี่ยนรูปนิพจน์และเลือกวิธีการที่เหมาะสม เช่น การแยกตัวประกอบหรือการคูณด้วยคอนจูเกต เพื่อให้ลิมิตอยู่ในรูปที่สามารถดำเนินการต่อไปได้

ระดับสิ่งที่เรียนรู้ (Object) นักศึกษาสามารถดำเนินการหาลิมิตสุดท้ายได้อย่างถูกต้อง และมองลิมิตเป็นวัตถุทางคณิตศาสตร์ที่สามารถนำไปใช้ได้

ระดับโครงสร้างความคิด (Schema) นักศึกษาสามารถบูรณาการแนวคิดเกี่ยวกับลิมิต พฤติกรรมของฟังก์ชัน และเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง เพื่อพิจารณาสถานการณ์ที่มีความซับซ้อนในภาพรวมได้อย่างเป็นระบบ

ข้อคำถามในแบบทดสอบปรนัยได้รับการออกแบบโดยกำหนดระดับตามพฤติกรรมที่ต้องการวัดในแต่ละระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ทั้งนี้ การกำหนดระดับของข้อคำถามยึดตามวัตถุประสงค์ของการวัดระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน โดยเนื้อหาเดียวกันสามารถนำไปออกแบบข้อคำถามได้ในหลายระดับ ขึ้นอยู่กับลักษณะของโจทย์ที่กำหนด ในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณจากแบบทดสอบปรนัย ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้มาหาค่าคะแนนเฉลี่ยและแปลงเป็นร้อยละ แล้วแปลผลตามเกณฑ์แบบอิงเกณฑ์ของ Srisaard (2017) ซึ่งแบ่งระดับความเข้าใจออกเป็น 5 ระดับ ดังนี้

ร้อยละ	81.00 – 100.00	หมายถึง มีระดับความเข้าใจในระดับ ดีมาก
ร้อยละ	61.00 – 80.00	หมายถึง มีระดับความเข้าใจในระดับ ดี
ร้อยละ	41.00 – 60.00	หมายถึง มีระดับความเข้าใจในระดับ ปานกลาง
ร้อยละ	21.00 – 40.00	หมายถึง มีระดับความเข้าใจในระดับ น้อย
ร้อยละ	0.00 – 20.00	หมายถึง มีระดับความเข้าใจในระดับ น้อยที่สุด

2. งานปฏิบัติ เรื่อง ลิขิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS จัดทำขึ้นเพื่อประเมินลักษณะความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในกลุ่มเป้าหมาย โดยงานปฏิบัติเป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ ครอบคลุมความเข้าใจทั้ง 4 ระดับตามทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991) ได้แก่ Action, Process, Object และ Schema ออกแบบครอบคลุมความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ทางคณิตศาสตร์ด้านเนื้อหา ด้านการดำเนินการ และด้านความสัมพันธ์ ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ข้อคำถามและเกณฑ์การให้คะแนนรูบริค (Rubric) พัฒนาตามกรอบทฤษฎี APOS และผ่านการตรวจสอบเชิงเนื้อหาโดยผู้เชี่ยวชาญ จำนวน 5 ท่าน ผลการประเมิน พบว่า ทุกข้อมีค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) เท่ากับ 1.00 แสดงให้เห็นว่าข้อคำถามและเกณฑ์การให้คะแนนสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ของการวัดในแต่ละระดับอย่างเหมาะสม เกณฑ์การให้คะแนนกำหนดคะแนนเต็มข้อละ 10 คะแนน แบ่งเป็น Action 2 คะแนน Process 3 คะแนน Object 2 คะแนน และ Schema 3 คะแนน ภายหลังได้รับอนุมัติการดำเนินการวิจัยจากคณะกรรมการจริยธรรมการวิจัยในมนุษย์ ผู้วิจัยได้นำงานปฏิบัติไปทดลองใช้ (Try-out) กับนักศึกษาที่ไม่ใช่กลุ่มที่เข้าร่วมการวิจัย จำนวน 10 คน เพื่อตรวจสอบความชัดเจนของภาษา ความเข้าใจในสถานการณ์โจทย์ที่กำหนดให้ ความเหมาะสมของเวลาในงานปฏิบัติ และความสอดคล้องของเกณฑ์การให้คะแนนรูบริคกับพฤติกรรมตามลำดับขั้นตามกรอบทฤษฎี APOS ผลการทดลองใช้ พบว่า นักศึกษาสามารถเข้าใจข้อคำถามได้อย่างถูกต้อง และโครงสร้างของงานปฏิบัติช่วยให้นักศึกษาแสดงพฤติกรรมตามระดับได้อย่างชัดเจน ผู้วิจัยจึงปรับปรุงถ้อยคำเล็กน้อยก่อนนำเครื่องมือไปใช้ในการเก็บข้อมูลจริง

ผลการวิจัย

1. ผลการศึกษาระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิขิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS

Table 1 คะแนนเฉลี่ยรวมจากแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิขิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS (n=40)

รายการ	จำนวนข้อ	คะแนนเต็ม	คะแนนเฉลี่ย (Mean)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (SD)	ร้อยละ	ระดับความเข้าใจ
คะแนนความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ทางคณิตศาสตร์ตามกรอบทฤษฎี APOS	30	30	19.50	4.47	65.00	ดี

ตาราง 1 แสดงผลคะแนนเฉลี่ยรวมจากแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงนิเทศศาสตร์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิขิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS จำนวน 30 ข้อ พบว่า นักศึกษาจำนวน 40 คน มีคะแนนเฉลี่ยรวม

เท่ากับ 19.50 จากคะแนนเต็ม 30 คะแนน โดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 4.47 คิดเป็นร้อยละ 65.00 ของคะแนนเต็ม พบว่า ระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในภาพรวมอยู่ในระดับดี

Table 2 คะแนนเฉลี่ยของระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS จำแนกรายระดับ (n=40)

ระดับความเข้าใจ เชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS	จำนวน ข้อ	คะแนน เต็ม	คะแนนเฉลี่ย (Mean)	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (SD)	ร้อยละ	ระดับ ความเข้าใจ
การกระทำ (Action)	8	8	5.83	2.18	72.88	ดี
กระบวนการ (Process)	7	7	5.15	1.85	73.57	ดี
สิ่งที่เรียนรู้ (Object)	8	8	4.63	2.35	57.88	ปานกลาง
โครงสร้างความคิด (Schema)	7	7	3.89	2.39	55.57	ปานกลาง
รวม	30	30	19.50	4.47	65.00	ดี

ตาราง 2 แสดงผลคะแนนเฉลี่ยของความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS จำแนกรายระดับ ของนักศึกษาจำนวน 40 คน พบว่า ระดับการกระทำ (Action) มีคะแนนเฉลี่ย 5.83 (SD = 2.18) และระดับกระบวนการ (Process) มีคะแนนเฉลี่ย 5.15 (SD = 1.85) ซึ่งทั้งสองระดับอยู่ในระดับดี ส่วนระดับสิ่งที่เรียนรู้ (Object) มีคะแนนเฉลี่ย 4.63 (SD = 2.35) และระดับโครงสร้างความคิด (Schema) มีคะแนนเฉลี่ย 3.89 (SD = 2.39) ซึ่งทั้งสองระดับอยู่ในระดับปานกลาง โดยเมื่อพิจารณาในภาพรวม พบว่า ระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาอยู่ในระดับดี

Table 3 ผลการจำแนกกลุ่มนักศึกษาตามคะแนนรวมจากแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS และการคัดเลือกนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย (n=40)

กลุ่มนักศึกษา	ช่วงคะแนนรวม	จำนวน (คน)	ร้อยละ	นักศึกษากลุ่มเป้าหมาย 6 คน
เก่ง	23-30	10	25.00	H1 = 26, H2 = 25
ปานกลาง	16-22	20	50.00	M1 = 22, M2 = 21
อ่อน	0-15	10	25.00	L1 = 15, L2 = 14
รวม	-	40	100.00	-

ตาราง 3 แสดงผลการจำแนกกลุ่มนักศึกษาตามคะแนนรวมจากแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษา จำนวน 40 คน โดยแบ่งกลุ่มตามสัดส่วนคะแนนรวม พบว่า นักศึกษากลุ่มเก่ง มีจำนวน 10 คน ร้อยละ 25 นักศึกษากลุ่มปานกลาง มีจำนวน 20 คน ร้อยละ 50 และนักศึกษากลุ่มอ่อน มีจำนวน 10 คน ร้อยละ 25 ทั้งนี้ ผู้วิจัยได้คัดเลือกนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย จำนวน 6 คน ได้แก่ H1 และ H2 จากกลุ่มเก่ง M1 และ M2 จากกลุ่มปานกลาง และ L1 และ L2 จากกลุ่มอ่อน เพื่อนำไปสู่การเก็บข้อมูลเชิงลึกต่อไป

2. ผลการวิเคราะห์ลักษณะของความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001)

นักศึกษากลุ่มเป้าหมาย จำนวน 6 คน ได้รับการจำแนกระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991) ได้แก่ ระดับการกระทำ (Action) จำนวน 2 คน ระดับกระบวนการ (Process) จำนวน 2 คน และระดับสิ่งที่เรียนรู้ถึงระดับโครงสร้างความคิด (Object-Schema) จำนวน 2 คน เพื่อความสะดวกในการนำเสนอข้อมูล ผู้วิจัยใช้รหัสสมมติแทนผู้ให้ข้อมูลหลักดังนี้ H1-H2 หมายถึง กลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง ซึ่งมีระดับความเข้าใจอยู่ในช่วง

ระดับสิ่งที่เรียนรู้และระดับโครงสร้างความคิด (Object-Schema) M1-M2 หมายถึง กลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง ซึ่งมีระดับความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ (Process) และ L1-L2 หมายถึง กลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน ซึ่งมีระดับความเข้าใจอยู่ในระดับการกระทำ (Action)

Table 4 ระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS จากงานปฏิบัติของนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย 6 คน ในแต่ละข้อ กรณี $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$

ข้อที่	โจทย์	กรณีรูปแบบไม่กำหนด	ระดับความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษา กลุ่มเป้าหมาย (6 คน)					
			L1	L2	M1	M2	H1	H2
1.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$	$\frac{0}{0}$	A	A	P	P	O	O
2.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$	$\frac{0}{0}$	A	A	P	P	O	O
3.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$	$\frac{0}{0}$	A	A	P	P	S	O
4.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 2}{2x^2 - 4x + 1}$	$\frac{\infty}{\infty}$	A	A	P	P	O	S
5.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$\frac{\infty}{\infty}$	A	A	P	P	O	S

ตาราง 4 แสดงระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS จากงานปฏิบัติของนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย จำนวน 6 คน ในแต่ละข้อ กรณี $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน (L1-L2) แสดงพฤติกรรมในระดับการกระทำ (Action) ทุกข้อ ส่วนนักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง (M1-M2) แสดงพฤติกรรมในระดับกระบวนการ (Process) ในทุกข้อ และนักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง (H1-H2) แสดงพฤติกรรมในระดับสิ่งที่เรียนรู้ (Object) และระดับโครงสร้างความคิด (Schema) แตกต่างกันไปตามลักษณะของแต่ละข้อ

หมายเหตุ: การจำแนกระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ของผู้เรียนตามกรอบทฤษฎี APOS ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยยึดลำดับขั้น Action-Process-Object-Schema เป็นเกณฑ์ในการจำแนกระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจากระดับความเข้าใจสูงสุดที่ผู้เรียนแสดงออก กล่าวคือ หากผู้เรียนเริ่มต้นจากระดับการกระทำ (A) และสามารถดำเนินการหรืออธิบายเหตุผลจนถึงระดับกระบวนการ จะจัดอยู่ในระดับกระบวนการ (P) หากสามารถอธิบายกระบวนการได้อย่างมีเหตุผลจนสามารถสรุปสิ่งที่เรียนรู้ จะจัดให้อยู่ในระดับสิ่งที่เรียนรู้ (O) และหากสามารถเชื่อมโยงแนวคิดลิมิต พฤติกรรมของฟังก์ชัน และเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ในภาพรวมได้ครบถ้วน จะจัดให้อยู่ในระดับโครงสร้างความคิด (S) ทั้งนี้ หากผู้เรียนทำในระดับ Process แต่ดำเนินการไม่ครบถ้วนหรือผิดพลาด ระดับยังคงอยู่ที่ Process โดยไม่ลดกลับไปเป็น Action และในกรณีที่ผู้เรียนเริ่มจากระดับ Action แต่สามารถอธิบายได้ในระดับที่สูงกว่า จะจัดระดับตามพฤติกรรมสูงสุดที่ผู้เรียนแสดงออกตามระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991)

2.1 พฤติกรรมที่ใช้พิจารณาระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามทฤษฎี APOS (งานปฏิบัติข้อที่ 5)

ผู้วิจัยออกแบบงานปฏิบัติข้อที่ 5 เพื่อใช้พิจารณาพฤติกรรมของนักศึกษาตามระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามทฤษฎี APOS โดยพิจารณาจากการตอบโจทย์ในงานปฏิบัติของนักศึกษาในแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับการกระทำ (Action) นักศึกษาแทนค่า $x \rightarrow \infty$ ลงในฟังก์ชัน $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ และสามารถระบุได้ว่าลิมิตที่กำหนดให้อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$ โดยยังไม่แสดงการจัดรูปนิพจน์หรือการเลือกวิธีหาลิมิต

ระดับกระบวนการ (Process) นักศึกษาจัดรูปนิพจน์เพื่อแก้ปัญหาแบบไม่กำหนด เช่น หารทั้งเศษและส่วนด้วย e^x เพื่อเปลี่ยนฟังก์ชันให้อยู่ในรูปที่สามารถพิจารณาพฤติกรรม เมื่อ $x \rightarrow \infty$ ได้ง่ายขึ้น และดำเนินการตามขั้นตอนอย่างถูกต้องและต่อเนื่อง โดยไม่จำเป็นต้องอธิบายความหมายของค่าลิมิตที่ได้

ระดับสิ่งที่เรียนรู้ (Object) นักศึกษาหาค่าลิมิตสุดท้ายได้อย่างถูกต้อง จากนิพจน์ที่จัดรูปแล้ว และสามารถอธิบายได้ว่าค่าลิมิตที่ได้สะท้อนพฤติกรรมของฟังก์ชัน เมื่อ $x \rightarrow \infty$ เช่น การอธิบายว่าพจน์ e^x มีอิทธิพลต่อพฤติกรรมของฟังก์ชันมากกว่า e^{-x}

ระดับโครงสร้างความคิด (Schema) นักศึกษาเลือกใช้กฎโลปีตาลได้อย่างเหมาะสมกับลิมิตในรูปแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ และสามารถอธิบายเหตุผล ว่าทำไมกฎโลปีตาลจึงใช้ได้在此กรณีนี้ พร้อมทั้งเชื่อมโยงและเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการจัดรูปนิพจน์กับผลลัพธ์จากการใช้กฎโลปีตาล เพื่ออธิบายลักษณะของลิมิตในภาพรวม

2.2 ผลการวิเคราะห์ลักษณะความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์จากงานปฏิบัติข้อที่ 5

จากการวิเคราะห์งานปฏิบัติข้อที่ 5 พบว่า นักศึกษาที่มีระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS แตกต่างกัน แสดงลักษณะความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในด้านเนื้อหา ด้านการดำเนินการ และด้านความสัมพันธ์ที่แตกต่างกัน จากพฤติกรรมที่นักศึกษาแสดงออกในการตอบงานปฏิบัติ

นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน (L1-L2) แสดงความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับการกระทำ (Action) โดยนักศึกษาสามารถแทนค่าเพื่อตรวจสอบพฤติกรรมของฟังก์ชันและระบุได้ว่าลิมิตที่กำหนดให้อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด อย่างไรก็ตาม นักศึกษายังไม่แสดงการเลือกวิธีการจัดรูปนิพจน์หรือการหาค่าลิมิต และไม่สามารถอธิบายเหตุผลของวิธีการที่ใช้ได้ พฤติกรรมที่แสดงสะท้อนความเข้าใจในด้านเนื้อหาในระดับพื้นฐาน ขณะที่ด้านการดำเนินการและด้านความสัมพันธ์ยังไม่ปรากฏผ่านการตอบงานปฏิบัติ

นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง (M1-M2) แสดงความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับกระบวนการ (Process) โดยนักศึกษาสามารถจัดรูปนิพจน์หรือเลือกวิธีการที่เหมาะสม เช่น การจัดรูปฟังก์ชัน เพื่อให้ลิมิตสามารถดำเนินการต่อได้ และสามารถดำเนินการตามขั้นตอนอย่างมีเหตุผล อย่างไรก็ตาม นักศึกษายังไม่สามารถอธิบายความหมายของค่าลิมิตในเชิงพฤติกรรมของฟังก์ชันหรือเชื่อมโยงผลลัพธ์กับแนวคิดเชิงโครงสร้างได้อย่างชัดเจน พฤติกรรมดังกล่าวสะท้อนความเข้าใจด้านการดำเนินการเป็นหลัก ขณะที่ด้านความสัมพันธ์ยังไม่ปรากฏผ่านการตอบงานปฏิบัติ

นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง (H1-H2) แสดงความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในระดับสิ่งที่เรียนรู้ (Object) และระดับโครงสร้างความคิด (Schema) โดยนักศึกษาสามารถหาค่าลิมิตได้อย่างถูกต้องจากนิพจน์ที่จัดรูปแล้ว และอธิบายได้ว่าค่าลิมิตที่ได้สะท้อนพฤติกรรมของฟังก์ชันอย่างไร นอกจากนี้ นักศึกษาบางคนสามารถเลือกใช้กฎโลปีตาลได้อย่างเหมาะสม พร้อมอธิบายเหตุผลของการเลือกใช้วิธีการดังกล่าวและเชื่อมโยงผลลัพธ์กับแนวคิดเกี่ยวกับลิมิตและพฤติกรรมของฟังก์ชัน พฤติกรรมที่แสดงสะท้อนความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ครบทั้งด้านเนื้อหา ด้านการดำเนินการ และด้านความสัมพันธ์

ทั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกนำเสนอานปฏิบัติข้อที่ 5 ในหัวข้อ 2.1 และ 2.2 เพื่อใช้เป็นกรณีตัวอย่างในการอธิบายการแสดงระดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ภายในโจทย์เดียว ขณะที่หัวข้อ 2.3 เป็นการสังเคราะห์ผลจากงานปฏิบัติทั้ง 5 ข้อร่วมกับการสัมภาษณ์เชิงลึก เพื่ออธิบายลักษณะความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในด้านเนื้อหา ด้านการดำเนินการ และด้านความสัมพันธ์ ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001)

2.3 ผลการวิเคราะห์เชิงคุณภาพจากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์เชิงลึก

ข้อมูลจากการทำานปฏิบัติและการสัมภาษณ์เชิงลึกสะท้อนให้เห็นความแตกต่างของการคิดและการให้เหตุผลของผู้ให้ข้อมูลหลักตามลำดับขั้นของทฤษฎี APOS โดยจำแนกเป็นความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ 3 ด้าน ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ดังนี้

ด้านที่ 1: ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านเนื้อหา (Content Understanding)

นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน (L1-L2) ผลจากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์ พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน ยังไม่เข้าใจความหมายของรูปแบบไม่กำหนดและโครงสร้างของฟังก์ชันได้อย่างเพียงพอ ในงานปฏิบัติข้อที่ 1 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “เมื่อลองแทนค่าแล้วได้ผลลัพธ์เช่นนี้ เราควรพิจารณาอะไรต่อ?” นักศึกษา L1 ตอบว่า “แทนแล้วได้ศูนย์ ก็เลยตอบศูนย์ค่ะ” สะท้อนให้เห็นว่านักศึกษายังไม่ตระหนักถึงการได้ผลลัพธ์แบบ 0 ว่าเป็นรูปแบบไม่กำหนดที่ต้องจัดรูปก่อนพิจารณาลิมิต ส่วนนักศึกษา L2 แม้สังเกตเห็นว่าเป็น “ศูนย์ส่วนศูนย์” แต่กล่าวว่า “ไม่รู้ว่ามันหมายถึงอะไร” แสดงให้เห็นว่านักศึกษายังไม่เข้าใจความหมายของรูปแบบไม่กำหนดหรือคุณสมบัติของฟังก์ชันที่กำลังพิจารณา ในงานปฏิบัติข้อที่ 4 เมื่อถามว่า “กรณีนี้เป็นลิมิตรูปแบบไหน และควรดูอะไรเป็นหลัก?” นักศึกษา L2 ตอบว่า “รู้ว่าเป็นอินฟินิตีส่วนอินฟินิตีครับ แต่ยังไม่ว่างจะเริ่มต้นอย่างไร” แม้ว่าจะสามารถระบุรูปแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ ได้ แต่นักศึกษายังไม่เข้าใจหลักการพิจารณาพจน์ที่มีดีกรีสูงสุดของพหุนามเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ สำหรับงานปฏิบัติข้อที่ 5 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ฟังก์ชันนี้มีแนวโน้มเป็นอย่างไร?” นักศึกษา L2 ตอบว่า “มันเหมือนจะเพิ่มขึ้นครับ แต่ไม่แน่ใจว่าต้องดูตรงไหน” แสดงถึงความสับสนในการแยกพฤติกรรมของ e^x ที่เพิ่มขึ้น กับ e^{-x} ที่ลดลงเข้าใกล้ศูนย์ จึงทำให้ผู้เรียนไม่เห็นภาพว่าลิมิตควรออกมาในลักษณะใด จากพฤติกรรมโดยรวม พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน ใช้การแทนค่าลงในฟังก์ชันเป็นหลัก และยังไม่เข้าใจความเชื่อมโยงของแนวคิดลิมิตได้นัก จึงจัดอยู่ในระดับการกระทำ (Action) ตามกรอบทฤษฎี APOS

นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง (M1-M2) ผลจากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์ พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง สามารถจำแนกรูปแบบไม่กำหนดและประเภทของฟังก์ชันได้ดีขึ้น แต่อธิบายความหมายของลิมิตและสิ่งที่ต้องตรวจสอบเพื่อกำหนดค่าลิมิตได้ไม่ครบถ้วน ในงานปฏิบัติข้อที่ 2 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “โจทย์นี้เป็นลิมิตของฟังก์ชันประเภทใด และอยู่ในรูปแบบใด?” นักศึกษา M1 ตอบว่า “เป็นลิมิตของรากกับพหุนามค่ะ อยู่ในรูปศูนย์ส่วนศูนย์” แต่เมื่อถามต่อว่า “แล้วคิดว่าคำตอบของลิมิตควรเป็นอย่างไร?” นักศึกษา M1 ตอบว่า “ยังไม่เห็นภาพค่ะ” แสดงให้เห็นว่านักศึกษามีความสามารถจำแนกฟังก์ชันและรูปแบบไม่กำหนดได้ แต่ยังไม่เข้าใจการจัดการรูปของฟังก์ชันส่งผลต่อค่าลิมิตอย่างไร ในงานปฏิบัติข้อที่ 4 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ควรพิจารณาพจน์ใดของฟังก์ชันตรงๆเป็นหลัก?” นักศึกษา M2 ตอบว่า “ผมไม่แน่ใจว่าควรดูพจน์ใดก่อนครับ” ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักศึกษายังไม่เข้าใจหลักการพิจารณาพจน์ดีกรีสูงสุดของพหุนาม เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ส่วนในงานปฏิบัติข้อที่ 5 เมื่อถามว่า “ระหว่าง e^x และ e^{-x} พจน์ใดมีผลต่อค่าลิมิตมากกว่า เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์?” นักศึกษาทั้ง 2 คน ตอบว่า “น่าจะเป็น e^x แต่ยังไม่แน่ใจว่าต้องดู e^{-x} ยังไงตอน x มากๆ” แสดงให้เห็นว่านักศึกษาริเริ่มสังเกตพฤติกรรมของฟังก์ชันเลขชี้กำลังได้ แต่ยังไม่สามารถอธิบายเหตุผลที่ทำให้ค่าลิมิตเป็นเช่นนั้น จากพฤติกรรมโดยรวม พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง สามารถทำตามขั้นตอนสำคัญได้บางส่วน แต่ยังไม่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดต่างๆ ให้เป็นภาพรวมที่ชัดเจน จึงจัดอยู่ในระดับกระบวนการ (Process) ตามกรอบทฤษฎี APOS

นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง (H1-H2) ผลจากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์ พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง มีความเข้าใจด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง และสามารถอธิบายเหตุผลประกอบได้อย่างชัดเจน ในงานปฏิบัติข้อที่ 3 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ฟังก์ชันนี้มีพฤติกรรมอย่างไรเมื่อ x เข้าใกล้ศูนย์?” นักศึกษา H1 ตอบว่า “เมื่อ x เข้าใกล้ศูนย์ ค่าลิมิตของ $\sin x$ เข้าใกล้ศูนย์ และลิมิต $\frac{\sin x}{x}$ เข้าใกล้หนึ่งครับ” ซึ่งสะท้อนว่านักศึกษามีความเข้าใจลิมิตพื้นฐานของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ถูกต้องครบถ้วน ในงานปฏิบัติข้อที่ 4 เมื่อถามว่า “เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ควรพิจารณาพจน์ใดของฟังก์ชันตรงๆเป็นหลัก?” นักศึกษา H2 ตอบว่า “พจน์ที่มีดีกรีสูงสุดเป็นตัวกำหนดครับ” ซึ่งตรงกับหลักการวิเคราะห์ลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ของฟังก์ชันตรงๆ และผู้เรียนสามารถให้เหตุผลสนับสนุนได้อย่างชัดเจน สำหรับงานปฏิบัติข้อที่ 5 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ลิมิตของฟังก์ชันเลขชี้กำลังนี้ขึ้นอยู่กับพจน์ใดเป็นหลัก?” นักศึกษา H1-H2 ตอบว่า “เมื่อ x เพิ่มขึ้น e^{-x} จะลดลงเข้าใกล้ศูนย์ ส่วน e^x เพิ่มขึ้นต่อเนื่องครับ” แสดงให้เห็นว่านักศึกษามีความเข้าใจพฤติกรรมของฟังก์ชันเลขชี้กำลังได้อย่างถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบาย

เหตุผลเชิงโครงสร้างของลิมิตได้อย่างครบถ้วน จากพฤติกรรมและคำอธิบายทั้งหมดของนักศึกษาในกลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง แสดงให้เห็นถึงความสามารถในการมองฟังก์ชันในเชิงโครงสร้าง และอธิบายความสัมพันธ์ของแนวคิดที่เกี่ยวข้องได้อย่างชัดเจน จึงจัดอยู่ในระดับสิ่งที่เรียนรู้และโครงสร้างความคิด (Object-Schema) ตามกรอบทฤษฎี APOS

ด้านที่ 2: ความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านการดำเนินการ (Procedural Understanding)

นักศึกษาในกลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน (L1-L2) ผลจากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์ พบว่า นักศึกษาในกลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อนยังใช้เทคนิคพื้นฐานในการจัดรูปลิมิตในรูปแบบไม่กำหนด กรณี $\frac{0}{0}$ ได้ไม่ถูกต้อง โดยเฉพาะในงานปฏิบัติข้อที่ 1 และ 2 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ถ้าแทนค่าแล้วได้ $\frac{0}{0}$ เราควรทำอย่างไรต่อ?” นักศึกษา L1 ตอบว่า “หนูไม่รู้ว่าจะต้องทำอย่างไร ก็เลยหยุดแค่นั้นละ” ส่วนนักศึกษา L2 กล่าวว่า “รู้ว่าเป็นส่วนน้อยส่วนน้อยครับ แต่ไม่รู้ว่าจะต้องจัดรูปอย่างไร” แสดงให้เห็นว่านักศึกษายังไม่สามารถใช้การแยกตัวประกอบหรือคูณด้วยสังยุคของพจน์ดีราก เพื่อจัดรูปตามขั้นตอนที่เหมาะสมได้ สำหรับงานปฏิบัติข้อที่ 3 เกี่ยวข้องกับการใช้ความรู้ทางตรีโกณมิติ นักศึกษากลุ่มนี้ทำได้เพียงเล็กน้อยหรือเว้นว่าง เนื่องจากไม่สามารถเชื่อมโยงนิพจน์ของฟังก์ชันกับลิมิตพื้นฐาน เช่น $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ จึงไม่สามารถดำเนินการหาลิมิตได้ พฤติกรรมดังกล่าวแสดงให้เห็นว่า นักศึกษาในกลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน ยังคงใช้การคิดแบบแทนค่าโดยตรง และยังไม่สามารถลำดับขั้นตอนในการหาลิมิตได้ จึงจัดอยู่ในระดับการกระทำ (Action) ตามกรอบทฤษฎี APOS

นักศึกษาในกลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง (M1-M2) ผลจากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์ พบว่า นักศึกษาในกลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง สามารถเลือกวิธีการจัดรูปได้ถูกต้อง แต่ยังไม่สามารถดำเนินการตามขั้นตอนได้ครบตามที่โจทย์กำหนด ในงานปฏิบัติข้อที่ 2 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ถ้าเป็นโจทย์ลิมิตที่มีพจน์ดีราก เราต้องจัดรูปให้ง่ายขึ้นอย่างไร?” นักศึกษา M1 ตอบว่า “ต้องคูณด้วยคอนจูเกต แต่ทำต่อไม่เป็นค่ะ” แสดงให้เห็นว่านักศึกษารู้วิธีการ แต่ยังไม่สามารถดำเนินการให้ครบขั้นตอนเพื่อให้หาลิมิตได้ สำหรับงานปฏิบัติข้อที่ 4 และ 5 ซึ่งเป็นโจทย์ลิมิตในรูปแบบไม่กำหนด กรณี $\frac{\infty}{\infty}$ เมื่อผู้วิจัยถามว่า “เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ควรพิจารณาพจน์ใดของฟังก์ชันตรงๆเป็นหลัก?” นักศึกษา M2 ตอบว่า “น่าจะต้องหารด้วยดีกรีสูงสุดครับ แต่ผมจัดลำดับตอนหารผิดครับ” คำตอบนี้แสดงให้เห็นว่านักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง สามารถเลือกใช้เทคนิคที่เหมาะสมได้ แต่ยังไม่ชำนาญในการจัดรูปฟังก์ชันพหุนามให้ถูกต้องได้ อีกทั้งยังไม่สามารถประยุกต์ใช้กฎโลปีตาล แม้ว่านักศึกษากลุ่มนี้จะเริ่มต้นด้วยวิธีการที่ถูกต้องแต่ยังไม่สามารถดำเนินการตามขั้นตอนได้ จึงจัดอยู่ในระดับกระบวนการ (Process) ตามกรอบทฤษฎี APOS

นักศึกษาในกลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง (H1-H2) ผลจากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์ พบว่า นักศึกษาในกลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง สามารถใช้เทคนิคที่เหมาะสมและดำเนินการแก้โจทย์ลิมิตได้ครบถ้วนตามลำดับ ในงานปฏิบัติข้อที่ 3 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ในการหาลิมิตข้อนี้ ควรจัดรูปฟังก์ชันอย่างไร?” นักศึกษา H1 ตอบว่า “ผมจัดรูปลิมิต $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ ให้อยู่ในรูปลิมิต $(\frac{\sin x}{x})^2$ ได้ครับ เพราะลิมิต $\frac{\sin x}{x}$ จะเข้าใกล้หนึ่ง เมื่อ x เข้าใกล้ศูนย์” ซึ่งเป็นการใช้ลิมิตพื้นฐานได้อย่างถูกต้อง ในงานปฏิบัติข้อที่ 4 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “เมื่อ x มีค่ามาก ควรพิจารณาพจน์ใดของฟังก์ชันตรงๆเป็นหลัก?” นักศึกษา H2 ตอบว่า “พจน์ดีกรีสูงสุดเป็นตัวกำหนดครับ” สำหรับงานปฏิบัติข้อที่ 5 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ในข้อนี้ควรใช้วิธีใดในการหาลิมิต เพราะเหตุใด?” นักศึกษา H1 ตอบว่า “ใช้กฎโลปีตาลได้ครับ เพราะอยู่ในรูปแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ ” และนักศึกษา H2 อธิบายเพิ่มเติมว่า “ดูจากค่าฟังก์ชันก็ได้รับ เพราะเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ e^{-x} มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เหลือ e^x เป็นพจน์ที่กำหนดลิมิต” จากพฤติกรรมทั้งหมดนี้ แสดงให้เห็นว่านักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง สามารถเลือกวิธีการที่เหมาะสม อธิบายเหตุผลได้ชัดเจน และเข้าใจโครงสร้างของฟังก์ชันในเชิงลึก จึงจัดอยู่ในระดับสิ่งที่เรียนรู้และโครงสร้างความคิด (Object-Schema) ตามกรอบทฤษฎี APOS

ด้านที่ 3: ความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านความสัมพันธ์ (Relational Understanding)

นักศึกษาในกลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน (L1-L2) ผลจากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์ พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน ยังไม่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับลิมิต ในงานปฏิบัติข้อที่ 1 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ถ้าแทนค่าแล้วได้ $\frac{0}{0}$ เราควร

พิจารณาอะไรต่อ?” นักศึกษา L1 ตอบว่า “แทนแล้วได้ศูนย์ ก็เลยตอบศูนย์ค่ะ” ส่วนนักศึกษา L2 ตอบว่า “เห็นว่าเป็นศูนย์ ส่วนศูนย์ครับ แต่ไม่รู้ว่าจะทำอะไรต่อ” คำตอบเหล่านี้สะท้อนว่านักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน ยังไม่ทราบว่ามีขีดจำกัดในรูปแบบ $\frac{0}{0}$ ต้องจัดรูปก่อน จึงยังไม่เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างรูปแบบไม่กำหนดว่าส่งผลต่อค่าลิมิตของฟังก์ชันอย่างไร ในงานปฏิบัติข้อที่ 3 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ฟังก์ชันนี้มีความต่อเนื่องหรือไม่ และต้องตรวจสอบอะไรบ้าง?” นักศึกษา L2 ตอบว่า “ดูไม่ออกครับ” แสดงว่านักศึกษายังไม่สามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างลิมิต ค่าฟังก์ชัน และเงื่อนไขของความต่อเนื่องได้ สำหรับงานปฏิบัติข้อที่ 5 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “ระหว่าง e^x และ e^{-x} พจน์ใดมีผลต่อค่าลิมิตมากกว่า?” นักศึกษา L2 ตอบว่า “มันเหมือนจะเพิ่มขึ้นครับ แต่ไม่รู้ว่าจะดูตรงไหน” แสดงให้เห็นว่านักศึกษายังไม่เข้าใจความเชื่อมโยงระหว่าง e^x และ e^{-x} กับค่าลิมิต จากพฤติกรรมโดยรวม พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน ยังไม่สามารถมองเห็นความเชื่อมโยงของแนวคิดต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับลิมิตได้ จึงจัดอยู่ในระดับการกระทำ (Action) ตามกรอบทฤษฎี APOS

นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง (M1-M2) ผลจากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์ พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง เริ่มเห็นความสัมพันธ์ของแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับลิมิตในบางประเด็น แต่ยังไม่สมบูรณ์ ในงานปฏิบัติข้อที่ 2 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “หลังคุณด้วยคอนจูเกตแล้ว ควรตีความลิมิตอย่างไร?” นักศึกษา M1 ตอบว่า “ช่วยจัดรูปค่ะ แต่ยังไม่รู้ว่าพอจัดรูปแล้วลิมิตจะออกมาเป็นแบบไหน” แสดงให้เห็นว่านักศึกษายังไม่สามารถเชื่อมโยงขั้นตอนการจัดรูปว่ามีผลต่อค่าลิมิตอย่างไร ในงานปฏิบัติข้อที่ 3 เมื่อถามว่า “ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องไหม และต้องดูอะไรบ้าง?” นักศึกษา M2 ตอบว่า “น่าจะต่อเนื่องครับ แต่ไม่แน่ใจว่าต้องดูอะไร” แสดงให้เห็นว่านักศึกษายังไม่สามารถเชื่อมโยงลิมิตซ้าย ลิมิตขวา เข้ากับค่าฟังก์ชันเพื่อพิจารณาเงื่อนไขของความต่อเนื่องให้ครบถ้วนได้ และในงานปฏิบัติข้อที่ 5 เมื่อถามว่า “พจน์ใดเป็นตัวกำหนดค่าลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์?” นักศึกษา M1 ตอบว่า “น่าจะจะเป็น e^x ค่ะ เพราะเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์ ฟังก์ชัน e^x มีค่ามากกว่า e^{-x} ” ส่วนนักศึกษา M2 ตอบว่า “น่าจะจะเป็น e^x ครับ” ภาพรวมของพฤติกรรมดังกล่าว แสดงให้เห็นว่านักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง มีความเข้าใจด้านความสัมพันธ์ของแนวคิดในระดับหนึ่ง แต่ยังไม่สามารถเชื่อมโยงแนวคิดที่เกี่ยวข้องให้ครบถ้วนได้ จัดอยู่ในระดับกระบวนการ (Process) ตามกรอบทฤษฎี APOS

นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง (H1-H2) ผลจากงานปฏิบัติและการสัมภาษณ์ พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง สามารถเชื่อมโยงแนวคิดสำคัญของลิมิตได้อย่างเป็นระบบ โดยในงานปฏิบัติข้อที่ 3 เมื่อผู้วิจัยถามว่า “นิพจน์นี้เกี่ยวข้องกับลิมิตอย่างไร?” นักศึกษา H1 ตอบว่า “ผมจัดรูปลิมิต $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ ให้อยู่ในรูปลิมิต $(\frac{\sin x}{x})^2$ ได้ครับ เพราะลิมิต $\frac{\sin x}{x}$ จะเข้าใกล้หนึ่ง เมื่อ x เข้าใกล้ศูนย์” ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักศึกษาสามารถวิเคราะห์โครงสร้างนิพจน์และเชื่อมโยงกับลิมิตพื้นฐานได้อย่างถูกต้อง ในงานปฏิบัติข้อที่ 4 เมื่อถามว่า “ทำไมพจน์ตรีโกณมิติจึงเป็นตัวกำหนดลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้อนันต์?” นักศึกษา H2 ตอบว่า “พจน์ตรีโกณมิติจะหายไป เมื่อหารด้วย x ” จึงเหลือพจน์ตรีโกณมิติสูงสุด เป็นตัวกำหนดลิมิตครับ” แสดงให้เห็นว่านักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง สามารถเชื่อมโยงแนวคิดของพหุนามกับลิมิตเข้าใกล้อนันต์ได้อย่างชัดเจน และในงานปฏิบัติข้อที่ 5 เมื่อสอบถามว่า “ข้อนี้ใช้กฎโลปีตาลในการแก้โจทย์ลิมิตได้ไหม?” นักศึกษา H1 ตอบว่า “ใช้ได้เมื่อเป็นรูป $\frac{\infty}{\infty}$ แต่ข้อนี้ผมพิจารณาฟังก์ชัน เพราะ e^{-x} เข้าใกล้ศูนย์ ทำให้ลิมิตถูกกำหนดโดย e^x ” คำตอบเหล่านี้แสดงให้เห็นว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง สามารถเชื่อมโยงแนวคิดลิมิตได้อย่างเป็นเหตุเป็นผล จึงจัดอยู่ในระดับสิ่งที่เรียนรู้และโครงสร้างความคิด (Object-Schema) ตามกรอบทฤษฎี APOS

Table 5 ผลการสรุประดับความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย ตามกรอบทฤษฎี APOS และความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001)

ระดับความเข้าใจ ตามกรอบทฤษฎี APOS	ลักษณะความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์		
	ด้านเนื้อหา	ด้านการดำเนินการ	ด้านความสัมพันธ์

Action (L1-L2)	- ไม่สามารถพิจารณาโครงสร้างของฟังก์ชันได้ครบถ้วน โดยมีมุมมองเพียงผลของการแทนค่า - ไม่เข้าใจว่ารูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ และ $\frac{x}{x}$ เป็นรูปแบบที่ต้องจัดรูปสมการ - ไม่ทราบว่าพจน์ดีกรีสูงกว่าเป็นตัวกำหนดลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้อนันต์	- ไม่สามารถดำเนินการต่อเมื่อแทนค่าแล้วได้รูปแบบ $\frac{0}{0}$ - ไม่สามารถจัดรูปนิพจน์ที่ซับซ้อนได้ เช่น การแยกตัวประกอบ หรือการคูณด้วยสังยุคของพจน์ติดราก - ไม่สามารถเลือกวิธีแก้โจทย์ลิมิตที่เหมาะสมกับลักษณะนิพจน์ได้	- ไม่สามารถเชื่อมโยงลิมิตค่าฟังก์ชัน และความต่อเนื่องได้ - ไม่เข้าใจแนวโน้มของฟังก์ชันชี้กำลัง เช่น e^x และ e^{-x} - ไม่เห็นความสัมพันธ์ของพจน์หลัก พจน์รองในการกำหนดค่าลิมิต
Process (M1-M2)	- จำแนกประเภทของฟังก์ชันได้ดีขึ้น แต่ยังไม่สามารถประยุกต์ใช้กับทุกสถานการณ์ - เข้าใจการเข้าใกล้ค่าของลิมิต แต่ยังไม่ครอบคลุมกรณีที่ซับซ้อน	- เลือกวิธีการแก้โจทย์ลิมิตได้เหมาะสม แต่ยังไม่มีความคลาดเคลื่อนในการจัดลำดับขั้นตอนและการจัดรูปนิพจน์ - ใช้กฎโลปีตาลได้ในกรณีที่ เป็นโจทย์ที่คุ้นเคย แต่ยังไม่ทำได้อะไรครบทุกขั้นตอน	- เริ่มเข้าใจว่าการจัดรูปช่วยให้มองค่าลิมิตได้ง่ายขึ้น - ยังไม่สามารถเชื่อมโยงลิมิตซ้าย ลิมิตขวา กับค่าฟังก์ชันได้ - เชื่อมโยงพจน์หลักกับค่าลิมิตได้เฉพาะบางกรณี
Object-Schema (H1-H2)	- เข้าใจฟังก์ชันพื้นฐานและค่าลิมิตของฟังก์ชันได้ชัดเจน - เห็นโครงสร้างนิพจน์และเชื่อมโยงกับลิมิตได้ถูกต้อง - วิเคราะห์นิพจน์ได้ทั้งส่วนย่อยและโครงสร้างรวม และเข้าใจว่าพจน์ดีกรีสูงสุดเป็นตัวกำหนดลิมิต	- ใช้เทคนิคได้ถูกต้องและเลือกวิธีที่เหมาะสมกับลักษณะของโจทย์ - อธิบายเหตุผลของการเลือกวิธีได้อย่างชัดเจน - ใช้กฎโลปีตาลได้อย่างเหมาะสม และถูกต้องตามเงื่อนไข	- เชื่อมโยงแนวคิดลิมิต ความต่อเนื่อง และรูปแบบฟังก์ชันได้อย่างเป็นระบบ - เห็นความแตกต่างระหว่างพจน์หลักและพจน์อื่นๆ เพื่อใช้ในการอธิบายค่าลิมิตได้ชัดเจน และอธิบายเหตุผลเชิงโครงสร้างได้อย่างถูกต้อง

ตาราง 5 แสดงผลการสรุประดับความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์ของนักศึกษากลุ่มเป้าหมาย ตามกรอบทฤษฎี APOS และลักษณะความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) พบว่า หลังการสัมมนาเชิงลึกกับนักศึกษากลุ่มเป้าหมายแสดงให้เห็นระดับความเข้าใจเชิงคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ของนักศึกษากลุ่มเป้าหมายอย่างชัดเจน กล่าวคือ นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อนที่มีความเข้าใจระดับการกระทำ (Action) เข้าใจแนวคิดในรูปแบบการจดจำและทำตามขั้นตอน นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลางที่มีความเข้าใจระดับกระบวนการ (Process) เข้าใจเหตุผลและสามารถอธิบายขั้นตอนได้บางส่วน และนักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่งที่มีความเข้าใจระดับสิ่งที่เรียนรู้และระดับโครงสร้างความคิด (Object-Schema) มีความเข้าใจเชิงลึกมากกว่ากลุ่มอื่น เห็นความเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดลิมิต ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ได้อย่างเป็นระบบ

อภิปราย และข้อเสนอแนะ

ผลการวิจัยมีข้อค้นพบที่สามารถนำมาอภิปรายได้ดังนี้

1. ระดับความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS

ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษามีคะแนนเฉลี่ยรวม 19.50 จากคะแนนเต็ม 30 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 65.00 ซึ่งอยู่ในระดับดี (Srisaard, 2017) สะท้อนให้เห็นว่าโดยภาพรวมผู้เรียนมีระดับความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด ตามกรอบทฤษฎี APOS ในระดับที่มีพื้นฐานความเข้าใจที่สามารถพัฒนาสู่ระดับที่สูงขึ้นได้ เมื่อพิจารณาระดับความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS พบว่า ผู้เรียนส่วนมากยังคงอยู่ในระดับการกระทำ (Action) และระดับกระบวนการ (Process) ซึ่งเป็นช่วงที่ผู้เรียนใช้การทำตามขั้นตอนหรือเทคนิคที่คุ้นเคยมากกว่าการทำความเข้าใจเหตุผลและการเชื่อมโยงแนวคิดของลิมิตในภาพรวม ลักษณะดังกล่าวสอดคล้องกับแนวคิดของ Dubinsky (1991) ที่อธิบายว่าการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์เริ่มจากการทำตามตัวอย่าง ก่อนที่ผู้เรียนจะค่อยๆ พัฒนาการมองเห็นรูปแบบการคิดของตนเอง และเปลี่ยนแนวคิดให้เป็นสิ่งที่สามารถพิจารณาได้ในเชิงโครงสร้าง การเปลี่ยนผ่านจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับจึงต้องอาศัยกระบวนการคิดสะท้อน (Reflective Abstraction) ตามแนวคิดของ Piaget (1970) ผลการวิจัยนี้ยังสอดคล้องกับ Arnon et al. (2014) และ Sierpiska (1994) ที่รายงานว่าผู้เรียนจำนวนมากเข้าใจลิมิตผ่านการแทนค่าและการดำเนินการเชิงขั้นตอน มากกว่าการเข้าใจความหมายเชิงแนวคิดของการเข้าใกล้ค่า ส่งผลให้ผู้เรียนที่ยังอยู่ในระดับ Action และ Process ไม่สามารถตีความรูปแบบไม่กำหนด กรณี $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ ว่าจำเป็นต้องพิจารณาโครงสร้างของนิพจน์ก่อน แม้ว่าจะสามารถทำตามขั้นตอนบางอย่างได้ถูกต้องก็ตาม ในทางตรงข้าม ผู้เรียนที่พัฒนาไปถึงระดับสิ่งที่เรียนรู้ (Object) และระดับโครงสร้างความคิด (Schema) สามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของพจน์ต่างๆ ในฟังก์ชัน และเชื่อมโยงมนทัศน์เรื่องลิมิต ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์เข้าด้วยกันอย่างมีเหตุผล ซึ่งสอดคล้องกับ Cornu (2002) ที่อธิบายถึงความสามารถในการบูรณาการมนทัศน์เพื่อสร้างความเข้าใจที่ลุ่มลึก และแนวคิด Advanced Mathematical Thinking ของ Dreyfus (2002) ที่เน้นการมองมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในภาพรวมและการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนเข้าด้วยกัน

เมื่อพิจารณาร้อยละของคะแนนเต็มในแต่ละระดับความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS พบว่า ระดับการกระทำ (Action) และระดับกระบวนการ (Process) อยู่ในระดับดี ในขณะที่ระดับสิ่งที่เรียนรู้ (Object) และระดับโครงสร้างความคิด (Schema) อยู่ในระดับปานกลาง ผลคะแนนเฉลี่ยรายระดับตามกรอบทฤษฎี APOS สะท้อนให้เห็นว่า ผู้เรียนสามารถใช้ขั้นตอนและกระบวนการในการหาลิมิตได้ค่อนข้างดี แต่ยังไม่สามารถพัฒนาไปสู่การมองลิมิตเป็นแนวคิดเชิงโครงสร้างที่เชื่อมโยงกับแนวคิดอื่นได้อย่างสมบูรณ์ นอกจากนี้ เมื่อพิจารณาร้อยละของคะแนนเต็มในแต่ละระดับความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS พบว่า ระดับการกระทำ (Action) มีผลคะแนนต่ำกว่าระดับกระบวนการ (Process) เล็กน้อย แต่ลักษณะดังกล่าวไม่ถือเป็นความขัดแย้งกับกรอบทฤษฎี APOS เนื่องจากผู้เรียนบางส่วนอาจสามารถจดจำและใช้กระบวนการหรือขั้นตอนจากประสบการณ์การเรียนรู้เดิมได้ โดยที่ความสามารถในการควบคุม อธิบาย และประเมินการกระทำในทุกสถานการณ์ยังมีข้อจำกัด สะท้อนให้เห็นว่าการพัฒนาระดับความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ไม่ได้เป็นไปตามลำดับขั้นแบบตายตัว แต่เป็นกระบวนการเชิงพลวัตที่ขึ้นกับประสบการณ์และบริบทการเรียนรู้ของผู้เรียน เพื่อให้เห็นภาพผลการวิจัยได้ชัดเจนยิ่งขึ้น งานวิจัยนี้จึงวิเคราะห์ความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนผ่านกรอบสองมิติ ได้แก่ ระดับความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี APOS ของ Dubinsky (1991) และองค์ประกอบของความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ซึ่งประกอบด้วย ความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้านเนื้อหา ด้านการดำเนินการ และด้านความสัมพันธ์ การพิจารณาร่วมกันของกรอบทั้งสองช่วยให้เห็นว่า ผู้เรียนในแต่ละระดับของ APOS แสดงลักษณะความเข้าใจเชิงมนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในแต่ละองค์ประกอบแตกต่างกัน ไม่ใช่เพียงความถูกต้องของคำตอบหรือขั้นตอนการคำนวณเท่านั้น เมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยก่อนหน้า ผลการวิจัยนี้มีความสอดคล้องกับงานของ Arnon et al. (2014); Cornu (2002); Dreyfus (2002); Sierpiska (1994) อย่างไรก็ตาม งานวิจัยนี้ช่วยขยายความเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะการแสดงออกของความเข้าใจเชิงมนทัศน์

ทางคณิตศาสตร์ในแต่ละระดับ ตามกรอบทฤษฎี APOS เมื่อพิจารณาพร้อมกับองค์ประกอบของความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ จากผลการวิจัยดังกล่าว ผู้สอนควรออกแบบการจัดการเรียนการสอนที่มุ่งส่งเสริมการพัฒนาความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนอย่างต่อเนื่อง ตั้งแต่ระดับการกระทำ (Action) ผ่านการคิดสะท้อนและการอธิบายเหตุผลของวิธีการ ไปสู่การเชื่อมโยงแนวคิดลิมิตกับนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง เพื่อสนับสนุนการพัฒนาความเข้าใจของผู้เรียนจากระดับกระบวนการ (Process) ไปสู่ระดับสิ่งที่เรียนรู้ (Object) และระดับโครงสร้างความคิด (Schema) ตามกรอบทฤษฎี APOS

2. ลักษณะของความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001)

ผลการวิเคราะห์เชิงคุณภาพของนักศึกษาในกลุ่มเป้าหมาย จำนวน 6 คน ได้แก่ นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง (H1-H2) นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง (M1-M2) และนักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน (L1-L2) พบว่า ลักษณะของความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์มีความแตกต่างกันอย่างชัดเจนในทั้ง 3 ด้าน ตามแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ได้แก่ ความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านเนื้อหา ด้านการดำเนินการ และด้านความสัมพันธ์ รายละเอียดการอภิปรายผลในแต่ละด้านมีดังนี้

1) ความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านเนื้อหา (Content Understanding)

ผลการวิเคราะห์ พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน (L1-L2) มีความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้านเนื้อหาอยู่ในระดับการกระทำ (Action) ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยมองการหาลิมิตเป็นเพียงการแทนค่าตัวเลขลงในฟังก์ชัน และมักสรุปว่าผลลัพธ์ ว่า $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ คือคำตอบสุดท้าย นักศึกษากลุ่มนี้ยังไม่ตระหนักว่าผลลัพธ์ดังกล่าวเป็นรูปแบบไม่กำหนด ที่ต้องพิจารณาโครงสร้างของนิพจน์เพิ่มเติม จึงไม่สามารถอธิบายที่มาของรูปแบบไม่กำหนดหรือระบุแนวโน้มของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ค่าที่กำหนดหรือเข้าใกล้อนันต์ได้ ลักษณะดังกล่าวสอดคล้องกับข้อค้นพบของ Sierpinski (1994) ที่ชี้ว่าผู้เรียนมักยึดติดกับการแทนค่ามากกว่าการเข้าใจความหมายเชิงนิทัศน์ของการเข้าใกล้ค่า ในขณะที่นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง (M1-M2) มีความเข้าใจด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่เริ่มพัฒนาไปสู่ระดับกระบวนการ (Process) ตามกรอบทฤษฎี APOS นักศึกษากลุ่มนี้เริ่มตระหนักว่ารูปแบบไม่กำหนดไม่สามารถหาลิมิตได้ด้วยการแทนค่าโดยตรง จึงพยายามใช้วิธีการทางพีชคณิตเพื่อจัดรูปนิพจน์ใหม่ เช่น การแยกตัวประกอบ การคูณด้วยสังยุค หรือการหารด้วยพจน์ที่มีดีกรีสูงสุด อย่างไรก็ตาม นักศึกษายังไม่สามารถอธิบายเหตุผลเชิงนิทัศน์ได้ว่าการจัดรูปในลักษณะดังกล่าวช่วยให้พิจารณาลิมิตได้อย่างไร และยังไม่สามารถเชื่อมโยงความหมายของลิมิตกับโครงสร้างของฟังก์ชันในภาพรวมได้ สำหรับนักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง (H1-H2) มีความเข้าใจด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสิ่งที่เรียนรู้และระดับโครงสร้างความคิด (Object-Schema) ตามกรอบทฤษฎี APOS ซึ่งสะท้อนความเข้าใจในระดับที่ลุ่มลึก โดยนักศึกษาสามารถมองเห็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของลิมิตได้อย่างชัดเจน อธิบายความหมายของรูปแบบไม่กำหนดได้อย่างเป็นเหตุเป็นผล ระบุแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ค่าที่กำหนดหรือเข้าใกล้อนันต์ได้ถูกต้อง และเชื่อมโยงความหมายของลิมิตเข้ากับแนวคิดเรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้อย่างเหมาะสม นักศึกษากลุ่มนี้สามารถพิจารณาโครงสร้างของนิพจน์และอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ต่างๆ ในฟังก์ชันได้อย่างมีเหตุผล สอดคล้องกับแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ที่อธิบายว่าความเข้าใจด้านเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เกิดจากการมองเห็นความหมายและโครงสร้างของนิทัศน์ มากกว่าการคำนวณตามขั้นตอนเพียงอย่างเดียว ในงานวิจัยนี้ การพัฒนาความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้านเนื้อหาจึงจำเป็นต้องอาศัยการเปลี่ยนผ่านมุมมองจากการมองลิมิตเป็นเพียงผลลัพธ์ของการคำนวณ ไปสู่การมองลิมิตเป็นนิทัศน์เชิงโครงสร้างที่สมบูรณ์

2) ความเข้าใจเชิงนิทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านการดำเนินการ (Procedural Understanding)

ผลการวิเคราะห์ พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน (L1-L2) มีความเข้าใจด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับการกระทำ (Action) ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยนักศึกษายังคงปฏิบัติตามขั้นตอนหรือทำตามสูตรที่คุ้นเคยจาก

ประสบการณ์เดิม เช่น การพยายามแยกตัวประกอบ การคูณด้วยสลับยุค หรือการใช้กฎโลปีตาล โดยไม่ได้พิจารณาเงื่อนไขสำคัญว่าฟังก์ชันนั้นมีความต่อเนื่องหรือสามารถหาอนุพันธ์ได้หรือไม่ ลักษณะดังกล่าวสะท้อนว่านักศึกษายังไม่เข้าใจจุดมุ่งหมายของกระบวนการในการหาค่าลิมิต และยังไม่สามารถดำเนินการตามขั้นตอนอย่างมีเหตุผลได้ครบถ้วน นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง (M1-M2) มีความเข้าใจด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนาอยู่ในระดับกระบวนการ (Process) ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยนักศึกษาสามารถเลือกใช้วิธีการที่เหมาะสมกับลักษณะของโจทย์ได้มากขึ้น เช่น การเลือกใช้การแยกตัวประกอบเมื่อพบรูปแบบไม่กำหนดกรณี $\frac{0}{0}$ หรือการหารด้วยพจน์ที่มีดีกรีสูงสุด เมื่อพบรูปแบบไม่กำหนดกรณี $\frac{\infty}{\infty}$ อย่างไรก็ตาม แม้นักศึกษาจะเลือกใช้วิธีการได้ถูกต้อง แต่ยังไม่สามารถอธิบายเหตุผลของขั้นตอนที่เลือกใช้ได้อย่างชัดเจน และยังขาดการตรวจสอบเงื่อนไขหรือความหมายของกระบวนการที่ดำเนินการอยู่ ลักษณะการแสดงออกนี้สะท้อนว่านักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลางสามารถดำเนินการตามขั้นตอนได้ แต่ยังไม่สามารถให้เหตุผลเชิงมโนทัศน์รองรับวิธีการเหล่านั้นได้อย่างสมบูรณ์ นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง (H1-H2) มีความเข้าใจด้านการดำเนินการทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสิ่งที่เรียนรู้และระดับโครงสร้างความคิด (Object-Schema) ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยนักศึกษาสามารถอธิบายความเชื่อมโยงของวิธีการหาค่าลิมิตแต่ละวิธีได้อย่างชัดเจน เช่น การแยกตัวประกอบ การคูณด้วยสลับยุค การหารด้วยพจน์ที่มีดีกรีสูงสุด และการใช้กฎโลปีตาล พร้อมทั้งอธิบายได้ว่าวิธีการเหล่านั้นช่วยปรับเปลี่ยนรูปแบบของฟังก์ชันให้สามารถพิจารณาค่าลิมิตได้อย่างเหมาะสม นักศึกษากลุ่มนี้ตระหนักถึงเหตุผลและเงื่อนไขของแต่ละขั้นตอน ทำให้สามารถเลือกใช้วิธีการได้สัมพันธ์กับลักษณะของฟังก์ชัน ลักษณะดังกล่าวสะท้อนถึงความเข้าใจด้านการดำเนินการที่มีเป้าหมายและเป็นไปอย่างมีเหตุผล มากกว่าเพียงการปฏิบัติตามตัวอย่าง ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ที่อธิบายว่าความเข้าใจด้านการดำเนินการต้องเกิดจากการตระหนักถึงจุดหมายของแต่ละขั้นตอน และสนับสนุนข้อค้นพบของ Dubinsky (1991) ที่ระบุว่าผู้เรียนในระดับที่สูงขึ้นจะสามารถอธิบายเหตุผลของวิธีการที่ใช้ได้มากกว่าการปฏิบัติตามขั้นตอนเพียงอย่างเดียว ในงานวิจัยนี้ การพัฒนาความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้านการดำเนินการจึงจำเป็นต้องอาศัยการปรับเปลี่ยนกระบวนการเรียนรู้จากการฝึกฝนทักษะการคำนวณตามขั้นตอนที่คุ้นเคย ไปสู่การคิดวิเคราะห์เพื่อเลือกใช้วิธีการที่เหมาะสมและสอดคล้องกับเงื่อนไขของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผล

3) ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ด้านความสัมพันธ์ (Relational Understanding)

ผลการวิเคราะห์ พบว่า นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มอ่อน (L1-L2) มีความเข้าใจด้านความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับการกระทำ (Action) ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยนักศึกษาไม่สามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดลิมิต ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ได้ นักศึกษามักใช้วิธีการต่างๆ เช่น การจัดรูปนิพจน์หรือการใช้กฎโลปีตาล โดยไม่เข้าใจว่าที่มาของวิธีการเหล่านั้นเกี่ยวข้องกับแนวคิดเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องอย่างไร รวมทั้งไม่เห็นวามีวิธีการที่แตกต่างกันมีจุดมุ่งหมายร่วมกันในการจัดการกับรูปแบบไม่กำหนด ลักษณะดังกล่าวสะท้อนการมองแนวคิดทางคณิตศาสตร์แยกเป็นส่วนๆ โดยยังไม่สามารถเชื่อมโยงเป็นความสัมพันธ์เชิงแนวคิดได้ นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มปานกลาง (M1-M2) มีความเข้าใจด้านความสัมพันธ์ที่เริ่มพัฒนาไปสู่ระดับกระบวนการ (Process) ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยนักศึกษาเริ่มสังเกตเห็นว่าวิธีการจัดรูปนิพจน์ที่แตกต่างกันอาจนำไปสู่คำตอบของลิมิตเดียวกัน อย่างไรก็ตาม นักศึกษายังไม่สามารถอธิบายที่มาหรือโครงสร้างความคิดที่เชื่อมโยงวิธีการเหล่านั้นเข้าด้วยกันได้อย่างเป็นเหตุเป็นผล ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้านความสัมพันธ์จึงยังจำกัดอยู่กับการรับรู้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน มากกว่าการเข้าใจความเชื่อมโยงเชิงแนวคิดระหว่างลิมิต ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ นักศึกษากลุ่มเป้าหมายกลุ่มเก่ง (H1-H2) มีความเข้าใจด้านความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสิ่งที่เรียนรู้และระดับโครงสร้างความคิด (Object-Schema) ตามกรอบทฤษฎี APOS โดยนักศึกษาแสดงความเข้าใจระดับสูงที่สามารถเชื่อมโยงวิธีการจัดรูปต่างๆ ว่าเป็นกระบวนการเปลี่ยนรูปฟังก์ชันเพื่อพิจารณาค่าลิมิตในภาพรวม พร้อมทั้งมองเห็นความสัมพันธ์เชิงลึกระหว่างลิมิต ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้อย่างมีเหตุผล พฤติกรรมนี้สอดคล้องกับแนวคิดของ Kilpatrick et al. (2001) ที่อธิบายว่า ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้านความสัมพันธ์เกิดจากการมองมโนทัศน์ทาง

คณิตศาสตร์หลายด้านให้เชื่อมโยงกันเป็นภาพรวม และสนับสนุนแนวคิดของ Cornu (2002) รวมถึง Dreyfus (2002) ที่เน้นการมองมโนทัศน์ในลักษณะองค์รวม มากกว่าการมองแยกส่วนเฉพาะเทคนิคใดเทคนิคหนึ่ง ในงานวิจัยนี้ การพัฒนาความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ด้านความสัมพันธ์จึงจำเป็นต้องอาศัยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นการเชื่อมโยงความรู้เดิมไปสู่มโนทัศน์ใหม่ เพื่อเปลี่ยนผ่านจากการเรียนรู้เชิงเทคนิคไปสู่การสร้างโครงสร้างความคิดที่บูรณาการความสัมพันธ์ระหว่างลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้อย่างสมบูรณ์

ข้อเสนอแนะในการนำผลวิจัยไปใช้

1. นำผลการวิจัยไปใช้เป็นแนวทางในการออกแบบการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน โดยจัดกิจกรรมที่ส่งเสริมการพัฒนาความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ตามลำดับขั้นของทฤษฎี APOS
2. นำแบบทดสอบและงานปฏิบัติจากการวิจัยนี้ไปใช้เป็นเครื่องมือประเมินระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน เพื่อปรับปรุงการจัดการเรียนการสอนให้เหมาะสมกับความแตกต่างของกลุ่มผู้เรียน
3. นำผลการวิจัยไปใช้ในการพัฒนาอาจารย์ผู้สอนและจัดทำเอกสารประกอบการสอน เพื่อเสริมประสิทธิภาพการวิเคราะห์การเรียนรู้ของผู้เรียน

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ขยายการวิจัยไปยังหัวข้ออื่นของแคลคูลัส เพื่อวิเคราะห์ระดับความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ในบริบทที่หลากหลาย
2. ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับความเข้าใจตามกรอบทฤษฎี APOS กับองค์ประกอบของความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ เพื่อสร้างแบบจำลองเชิงโครงสร้างของการเรียนรู้คณิตศาสตร์

References

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153–166). New York: Kluwer Academic Publishers.
- Damsubhan, V. (2015). *Conception and study of mathematical understanding*. Bangkok: Danex Intercorporation. [in Thai]
- Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153–166). New York: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153–166). New York: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275–282). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Fatqurhohman, F. (2016). Transition process of procedural to conceptual understanding in solving mathematical problems. *International Education Studies*, 9(9), 182–190.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). New York: Macmillan.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington D.C.: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*.

Retrieved from <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>

National Research Council (2001) Adding It up: Helping Children Learn Mathematics. In: Kilpatrick, J., Swafford, J. and Findell, B., Eds., *Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education*. Washington D.C.: National Academy Press.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2018). *The future of education and skills: Education 2030*. Retrieved from

https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/about/projects/edu/education-2040/1-1-learning-compass/OECD_Learning_Compass_2030_Concept_Note_Series.pdf

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology* (E. Duckworth, Trans.). New York: Columbia University Press.

Prachumkayohmat, S., Piasai, K., Hajisalah, S., & Janjaroon, A. (2020). Study of the level of mathematical conceptual understanding on measurements of length and weight among sixth-grade students. *Journal of Research Unit on Science, Technology and Environment for Learning*, 11(2), 290–304. [in Thai]

Przeniosło, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103–132.

Schoenfeld, A. H. (2023). Learning in math(s). In R. J. Tierney, F. Rizvi, & K. Ercikan (Eds.), *International Encyclopedia of Education* (4th ed., Vol. 6, pp. 323–334). Netherlands: Elsevier.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer Press.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.

Srisaard, B. (2017). *Introduction to research* (New revised edition, 7th ed.). Bangkok: Suweeriyasarn. [in Thai]

Sulastri, R., Suryadi, D., Prabawanto, S., & Cahya, E. (2022). Epistemological obstacles on limit and functions concepts: A phenomenological study in online learning. *Mathematics Teaching-Research Journal*, 14(5), 84-106.

Tall, D. O. (1993). Functions and calculus. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289–325). Netherlands: Springer.

Weldeana, H. N., Sbhatu, D. B., & Berhe, G. T. (2023). Freshman STEM students' misconceptions in a basic limit theorem of $\lim_{x \rightarrow 0}(\sin x/x)$. *Heliyon*, 9(12), e22359.