

การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2
ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วิธีการแบบเปิด

Algebraic Thinking of Grade 2 Students in a Mathematics Classroom
Using the Open Approach

เกษม เปรมประยูร¹ และ สุวรรณี เปลี่ยนรัมย์^{2*}

Kasem Premprayoon¹ and Suwannee Plianram^{2*}

^{1, 2} คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

(Faculty of Education, Thaksin University)

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วิธีการแบบเปิด การวิจัยใช้รูปแบบการวิจัยเชิงคุณภาพตามแนวทางชาติพันธุ์วรรณาในชั้นเรียนกลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 6 คน ซึ่งคัดเลือกแบบเจาะจงให้ครอบคลุมระดับความสามารถสูงปานกลางและต่ำ ระดับละ 2 คน จากชั้นเรียนในโรงเรียนที่เข้าร่วมการศึกษาชั้นเรียนด้วยวิธีการแบบเปิดหรือ TLSOA เก็บรวบรวมข้อมูลจำนวน 4 คาบเรียน จากชิ้นงานนักเรียน โปรโตคอลชั้นเรียน ภาพถ่ายกระดาน การสังเกตชั้นเรียนและโปรโตคอลการคิดออกเสียง วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้กรอบกิจกรรมทางพีชคณิต 3 ประเภทของ Kieran (2004) ซึ่งในการวิจัยนี้เรียกโดยย่อว่าโมเดล GTG ร่วมกับหลักฐานที่ปรากฏในกระบวนการวิธีการแบบเปิด ตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือด้วยดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับวัตถุประสงค์ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0.67-1.00 และตรวจสอบความเชื่อมั่นระหว่างผู้สังเกตด้วยค่าสัมประสิทธิ์แคปปาของโคเฮนได้ค่า 0.78 รวมทั้งตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อมูลด้วยการตรวจสอบสามเส้า การตรวจสอบข้อมูลกับผู้มีส่วนร่วมและการอภิปรายกับเพื่อนนักวิจัย ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนแสดงการคิดเชิงพีชคณิตครบทั้ง 3 แกนของโมเดล GTG รวม 11 รูปแบบย่อย ได้แก่ กิจกรรมการสร้างความสัมพันธ์ทางพีชคณิต 4 รูปแบบ กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการ 4 รูปแบบและกิจกรรมระดับอภิมโนทัศน์ 3 รูปแบบ ข้อค้นพบสำคัญคือ สัญลักษณ์ $\square$ พัฒนาจากช่องว่างท้ายสมการสำหรับเติมผลลัพธ์ไปสู่สัญลักษณ์แทนปริมาณที่ไม่ทราบค่าในตำแหน่งต่าง ๆ ของสมการโดยมีแบบจำลองแถบและการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนเป็นกลไกสำคัญที่ช่วยให้นักเรียนเชื่อมโยงสถานการณ์ปัญหา ประโยคสัญลักษณ์และการให้เหตุผลเชิงโครงสร้าง ผลการวิจัยสะท้อนว่านักเรียนประถมศึกษาตอนต้นสามารถเรียนรู้แนวคิดพีชคณิตระยะแรกผ่านเนื้อหาเลขคณิตปกติได้เมื่อมีการออกแบบปัญหาปลายเปิด สื่อแทนความสัมพันธ์และการอภิปรายทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ

คำสำคัญ: การคิดเชิงพีชคณิต โมเดล GTG พีชคณิตระยะแรก แบบจำลองแถบ วิธีการแบบเปิด

ABSTRACT

This research article aimed to investigate the characteristics of algebraic thinking demonstrated by Grade 2 students in a mathematics classroom using the Open Approach. A qualitative research design based on classroom ethnography was employed. The key informants consisted of six Grade 2 students, purposively selected to represent three levels of mathematical ability — two high-ability, two medium-ability, and two low-ability students — from a classroom in a school participating in the Thailand Lesson Study Incorporated with Open Approach (TLSOA) project. Data were collected across four instructional periods from multiple sources, including students' written work, classroom protocols, blackboard photographs, classroom observations, and think-aloud protocols. Data analysis was conducted using Kieran's (2004) three-part model of algebraic activity, referred to in this study as the GTG Model, in conjunction with evidence situated within the Open Approach process. The quality of the research instruments was verified by three experts using the Index of Item-Objective Congruence (IOC), which yielded values ranging from 0.67 to 1.00. Inter-observer reliability was established using Cohen's Kappa coefficient ($K = 0.78$). Data trustworthiness was ensured through triangulation, member checking, and peer debriefing. The findings revealed that students demonstrated algebraic thinking across all three axes of the GTG Model, comprising 11 sub-patterns: four patterns of Generational Activity, four patterns of Transformational Activity, and three patterns of Global Meta-level Activity. The key finding was that the symbol $\square$ evolved from a blank space at the end of an equation for recording a known result to a symbol representing an unknown quantity at various positions within an equation. Bar Models and whole-class mathematical discussions served as critical mechanisms enabling students to connect problem situations, symbolic sentences, and structural reasoning. These findings suggest that early elementary students are capable of engaging with Early Algebra concepts through regular arithmetic content when open-ended problems, representational tools, and mathematical discussions are systematically and intentionally designed.

KEYWORDS: Algebraic Thinking, GTG Model, Early Algebra, Bar Model, Open Approach

**Corresponding author, E-mail: suwarnnee@tsu.ac.th Tel. 0902272332*

Received: 23 June 2026 /Revised: 22 August 2026 /Accepted: 26 August 2026 /Published online: 27 August 2026

บทนำ

การคิดเชิงพีชคณิต (Algebraic Thinking) เป็นรากฐานสำคัญของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับสูงเนื่องจากการเกี่ยวข้องกับการมองเห็นความสัมพันธ์ การใช้สัญลักษณ์ การให้เหตุผลกับโครงสร้างและการสรุปหลักการทั่วไปจากสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ Kaput (2008) อธิบายว่าการคิดเชิงพีชคณิตไม่ได้จำกัดอยู่เพียงการแก้สมการในระดับมัธยมศึกษาแต่ครอบคลุมการสร้างและแสดงความสัมพันธ์ทั่วไปรวมถึงการดำเนินการกับโครงสร้างเหล่านั้นอย่างเป็นระบบ ดังนั้น การเริ่มพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตตั้งแต่ระดับประถมศึกษาจึงเป็นประเด็นสำคัญต่อการสร้างความต่อเนื่องระหว่างเลขคณิตและพีชคณิต

อย่างไรก็ตามนักเรียนจำนวนมากยังประสบความสำเร็จยากลำบากเมื่อเข้าสู่การเรียนรู้พีชคณิตในระดับมัธยมศึกษาเพราะประสบการณ์ในระดับประถมศึกษาเน้นการคำนวณเพื่อหาคำตอบมากกว่าการมองความสัมพันธ์เชิงโครงสร้างของจำนวนและสมการ Blanton and Kaput (2003) จึงเสนอแนวทางการทำกิจกรรมเลขคณิตให้เป็นโอกาสในการเรียนรู้พีชคณิตหรือ Algebraizing เพื่อเปลี่ยนกิจกรรมเลขคณิตในชั้นเรียนประถมศึกษาให้เป็นโอกาสในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตโดยไม่จำเป็นต้องเพิ่มเนื้อหาใหม่อย่างแยกส่วน แนวคิดดังกล่าวทำให้การบวก การลบ ประโยคสัญลักษณ์และความสัมพันธ์แบบส่วนย่อย-ส่วนรวม (part-whole) กลายเป็นพื้นที่ในการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับปริมาณที่ไม่ทราบค่าและโครงสร้างของสมการ

แนวคิดพีชคณิตระยะแรก (Early Algebra) ชี้ว่านักเรียนประถมศึกษาสามารถพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับตัวแปร แบบรูป ฟังก์ชัน ความสัมพันธ์และโครงสร้างของสมการได้ หากได้รับสถานการณ์การเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้สังเกต อธิบาย เปรียบเทียบ แทนค่าและสรุปหลักการอย่างมีความหมาย (Blanton et al., 2019; Carraher et al., 2006; Kaput, 2008) งานวิจัยของ Carraher et al. (2006) และ Blanton et al. (2019) สนับสนุนว่าการพัฒนาพีชคณิตระยะแรกตั้งแต่มัธยมศึกษาช่วยสร้างพื้นฐานและความพร้อมสำหรับการเรียนรู้พีชคณิตที่ซับซ้อนขึ้นในระดับต่อไปสอดคล้องกับ Sun et al. (2023) ที่พบว่านักเรียนประถมศึกษาที่มีพัฒนาการของการคิดเชิงพีชคณิตอย่างเป็นลำดับ จากการคิดเชิงเลขคณิตไปสู่การคิดเชิงพีชคณิตที่เป็นนามธรรมมากขึ้น

ในระดับนานาชาติงานวิจัยด้านการสอนและการเรียนรู้พีชคณิตมีแนวโน้มให้ความสำคัญกับการขยายขอบเขตพีชคณิตระยะแรกสู่ระดับประถมศึกษามากขึ้น Ellis and Özgür (2024) ทบทวนงานวิจัยด้านพีชคณิตในช่วงปี 2018-2022 และพบว่าแนวโน้มสำคัญของงานวิจัยร่วมสมัยคือการศึกษานักเรียนสามารถพัฒนาการคิดเชิงวิเคราะห์ (analytic thinking) และการคิดเชิงโครงสร้าง (structural thinking) ได้อย่างไร มากกว่าการมุ่งพิจารณาเฉพาะข้อผิดพลาดของนักเรียน นอกจากนี้ Wilkie and Hopkins (2024) ยังพบว่านักเรียนประถมศึกษาสามารถแสดงการคิดเชิงความสัมพันธ์ (relational thinking) เกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงโครงสร้างของการลบได้ เมื่อได้รับภาระงานที่เอื้อต่อการสังเกตรูปแบบและการให้เหตุผลเชิงโครงสร้าง ในทิศทางเดียวกัน Torres et al. (2024) แสดงให้เห็นการเปลี่ยนจากการสรุปเชิงเลขคณิตเฉพาะกรณีไปสู่การสรุปความสัมพันธ์เชิงพีชคณิตที่เป็นทั่วไปมากขึ้น ขณะที่ Cai et al. (2011) ชี้ถึงบทบาทของสื่อแทนความสัมพันธ์ในการช่วยให้นักเรียนมองเห็นโครงสร้างทางพีชคณิตก่อนการใช้สัญลักษณ์ทางการ และ Cai and Rott (2024) อธิบายว่าการสร้างโจทย์ปัญหาเป็นกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการทำความเข้าใจสถานการณ์ การเชื่อมโยงข้อมูล การสร้างปัญหาและการสะท้อนผล

ในบริบทประเทศไทย Inprasitha (2022) ได้พัฒนาแนวทางการศึกษาชั้นเรียนด้วยวิธีการแบบเปิด (Thailand Lesson Study incorporated with Open Approach: TLSOA) โดยบูรณาการการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) กับวิธีการแบบเปิด (Open Approach) ซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ได้แก่ การนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด การเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน การอภิปรายและเปรียบเทียบทั้งชั้นเรียนและการสรุปและเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ กระบวนการดังกล่าวเปิดโอกาสให้นักเรียนสร้างวิธีคิดที่หลากหลาย อธิบายเหตุผลและเชื่อมโยงความคิดของตนกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ งานวิจัยของ Bunlang et al. (2024) ซึ่งศึกษากระบวนการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ (mathematization) ในชั้นเรียนที่ใช้ TLSOA พบว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจจากสถานการณ์รูปธรรมไปสู่การใช้ตัวเลขและสัญลักษณ์เพื่อสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมาย

เมื่อพิจารณางานวิจัยในบริบท TLSOA ที่กล่าวข้างต้น พบว่างานของ Inprasitha (2022) มุ่งอธิบายพัฒนาการของการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดในประเทศไทย ขณะที่ Bunlang et al. (2024) มุ่งศึกษากระบวนการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ของนักเรียน ส่วนโมเดล GTG ของ Kieran (2004) เป็นกรอบสำหรับอธิบายกิจกรรมทางพีชคณิตของผู้เรียน ดังนั้นจึงยังมีพื้นที่สำหรับการศึกษาที่เชื่อมบริบท TLSOA กับการวิเคราะห์ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนต้นอย่างเฉพาะเจาะจง โดยเฉพาะจากหลักฐานที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนจริงและในบริบท TLSOA ของภาคใต้ประเทศไทยซึ่งเป็นพื้นที่ของการวิจัยครั้งนี้ งานวิจัยนี้จึงมุ่งศึกษาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2

ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วิธีการแบบเปิดเพื่ออธิบายว่านักเรียนสามารถแสดงกิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิต กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการและกิจกรรมระดับอภิมโนทัศน์ได้อย่างไร ผ่านการเรียนรู้เนื้อหาเลขคณิตปกติที่ออกแบบด้วยปัญหาปลายเปิด แบบจำลองแถบและการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน

วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้วิธีการแบบเปิด

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. การคิดเชิงพีชคณิต (Algebraic Thinking) หมายถึง กระบวนการทางความคิดของนักเรียนที่เกี่ยวข้องกับการมองเห็นและอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ การใช้สัญลักษณ์โดยเฉพาะ $\square$ แทนปริมาณที่ไม่ทราบค่า การดำเนินการกับสมการเพื่อหาค่าที่ไม่ทราบ การตรวจสอบความสมเหตุสมผลและการสรุปความสัมพันธ์ทั่วไปทางคณิตศาสตร์ ในการวิจัยนี้วิเคราะห์ตามกรอบโมเดล GTG ของ Kieran (2004)
2. กิจกรรมการสร้างความสัมพันธ์ทางพีชคณิต (Generational Activity) หมายถึง ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่นักเรียนสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ เช่น การสร้างประโยคสัญลักษณ์จากสถานการณ์ปัญหา การใช้ $\square$ แทนปริมาณที่ไม่ทราบค่า การใช้แบบจำลองแถบแสดงความสัมพันธ์แบบส่วนย่อย-ส่วนรวม และการสร้างโจทย์ปัญหาจากแบบจำลอง
3. กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการ (Transformational Activity) หมายถึง ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่นักเรียนดำเนินการกับสมการหรือประโยคสัญลักษณ์ เช่น การหาค่าใน $\square$ การใช้ความสัมพันธ์ผกผันระหว่างการบวกและการลบ การตรวจสอบคำตอบและการเลือกวิธีคำนวณตามโครงสร้างของปัญหา
4. กิจกรรมระดับอภิมโนทัศน์ (Global Meta-level Activity) หมายถึง ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่นักเรียนยกระดับความเข้าใจจากกรณีเฉพาะไปสู่หลักการทั่วไป ให้เหตุผลเกี่ยวกับความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์และนำความเข้าใจไปใช้ในบริบทใหม่
5. วิธีการแบบเปิด (Open Approach) หมายถึง รูปแบบการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ใช้ปัญหาปลายเปิดเป็นจุดเริ่มต้นของการเรียนรู้ และดำเนินกิจกรรมผ่าน 4 ขั้นตอน ได้แก่ การนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด การเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน การอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียนและการสรุปและเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์
6. การศึกษาชั้นเรียนด้วยวิธีการแบบเปิด (Thailand Lesson Study incorporated with Open Approach: TLSOA) หมายถึง แนวทางการพัฒนาการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่บูรณาการกระบวนการศึกษาชั้นเรียนเข้ากับวิธีการแบบเปิดโดยครูและทีมการศึกษาชั้นเรียนร่วมกันออกแบบแผนการจัดการเรียนรู้ สังเกตชั้นเรียนจริงและสะท้อนผลการสอนอย่างเป็นระบบ ภายใต้กระบวนการเรียนรู้ที่ใช้ปัญหาปลายเปิดเป็นจุดเริ่มต้นและดำเนินกิจกรรมผ่าน 4 ขั้นตอน ได้แก่ การนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด การเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน การอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียนและการสรุปและเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ในการวิจัยนี้ TLSOA หมายถึงบริบทการจัดการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนสร้างวิธีคิด แสดงเหตุผล เปรียบเทียบแนวคิดและเชื่อมโยงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ผ่านการแก้ปัญหาและการอภิปรายในชั้นเรียน
7. แบบจำลองแถบ (Bar Model) หมายถึง แบบจำลองที่ใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณในสถานการณ์ปัญหา โดยเฉพาะความสัมพันธ์แบบส่วนรวมและส่วนย่อยเพื่อเชื่อมโยงสถานการณ์รูปธรรมกับประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

กรอบแนวคิดการวิจัย

กรอบแนวคิดการวิจัยนี้แบ่งเป็น 2 ส่วนที่ทำหน้าที่ต่างกันแต่เชื่อมโยงกัน ได้แก่ (1) บริบทการจัดการเรียนรู้ซึ่งประกอบด้วยวิธีการแบบเปิด สถานการณ์ปัญหาที่จัดลำดับความซับซ้อนของตำแหน่ง □ และแบบจำลองแถบในฐานะสื่อแทนความสัมพันธ์และ (2) กรอบการวิเคราะห์หลักฐานการคิดของนักเรียนโดยใช้โมเดล GTG ของ Kieran (2004) เป็นกรอบหลัก ทั้งนี้ วิธีการแบบเปิดและแบบจำลองแถบมีใช้หมวดการวิเคราะห์ของ GTG แต่เป็นองค์ประกอบของบริบทการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงการคิดเชิงพีชคณิตผ่านการแก้ปัญหา การอธิบาย การเปรียบเทียบและการสรุปเชื่อมโยงแนวคิด

ในส่วนของการวิเคราะห์คำว่า “กิจกรรม” (Activity) ในโมเดล GTG หมายถึงหมวดของกิจกรรมทางพีชคณิตที่ปรากฏจากการกระทำ คำอธิบายและชิ้นงานของนักเรียนมีใช้ขั้นตอนหรือกิจกรรมการสอนของวิธีการแบบเปิด ผู้วิจัยจำแนกหลักฐานออกเป็น 3 แกน ได้แก่ กิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิต กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์ หรือสมการและกิจกรรมระดับอิมโนทัศน์ในแต่ละคาบเรียนอาจปรากฏหลักฐานมากกว่าหนึ่งแกนขึ้นอยู่กับวิธีคิดและปฏิสัมพันธ์ของนักเรียน

สำหรับพัฒนาการของสัญลักษณ์ □ ผู้วิจัยใช้แนวคิดของ Radford (2018) เป็นกรอบตีความเสริมภายหลังการจำแนกหลักฐานด้วยโมเดล GTG เพื่ออธิบายการเคลื่อนจากการสรุปทั่วไปจากข้อเท็จจริงเฉพาะกรณี (factual generalization) ไปสู่การสรุปทั่วไปเชิงบริบท (contextual generalization) และการสรุปทั่วไปเชิงสัญลักษณ์ (symbolic generalization) บางส่วน กล่าวคือ GTG ใช้ตอบคำถามว่า “นักเรียนแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตแบบใด” ขณะที่แนวคิดของ Radford ใช้ช่วยตีความว่า “ความหมายและการใช้สัญลักษณ์ □ พัฒนาอย่างไรตลอด 4 คาบเรียน”

Table 1 กรอบการวิเคราะห์หลักสำหรับจำแนกกิจกรรมทางพีชคณิตของนักเรียนตามโมเดล GTG

แกนของโมเดล GTG	ความหมายเชิงปฏิบัติการในงานวิจัยนี้	ตัวอย่างหลักฐานที่ใช้วิเคราะห์
กิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิต	การสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์	ประโยคสัญลักษณ์ การใช้ □ การอ่านแบบจำลองแถบและการสร้างโจทย์ปัญหา
กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการ	การดำเนินการกับสมการหรือประโยคสัญลักษณ์	การหาค่าใน □ การใช้ความสัมพันธ์ผกผันและการตรวจสอบคำตอบ
กิจกรรมระดับอิมโนทัศน์	การยกระดับความเข้าใจไปสู่หลักการทั่วไป	การสรุปความสัมพันธ์ การให้เหตุผลและการประยุกต์ในบริบทใหม่

วิธีดำเนินการวิจัย

รูปแบบการวิจัย

การวิจัยนี้ใช้รูปแบบการวิจัยเชิงคุณภาพตามแนวทางชาติพันธุ์วรรณาในชั้นเรียนเนื่องจากมุ่งทำความเข้าใจลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในสภาพแวดล้อมการเรียนรู้ที่เป็นธรรมชาติโดยไม่มีการจัดกระทำหรือควบคุมตัวแปรจุดเน้นของการวิจัยจึงไม่ใช่การวัดผลสัมฤทธิ์เชิงสถิติแต่เป็นการอธิบายปรากฏการณ์การคิดของนักเรียนจากหลักฐานเชิงประจักษ์ที่เกิดขึ้นระหว่างการแก้ปัญหา การอภิปรายและการสรุปบทเรียน

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยมีบทบาทเป็นสมาชิกของทีมการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) ภายใต้ TLSOA และทำหน้าที่เป็นผู้สังเกตการณ์แบบมีส่วนร่วมบางส่วน (partial participant observer) ในชั้นเรียนโดยไม่ได้ทำหน้าที่เป็นครูผู้สอนในคาบเรียนที่เก็บข้อมูล บทบาทดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยเข้าใจบริบทของชั้นเรียนและกระบวนการออกแบบบทเรียนอย่างใกล้ชิด อย่างไรก็ตามเพื่อป้องกันอคติจากความใกล้ชิดกับบริบท ผู้วิจัยดำเนินการสะท้อนตนเองผ่านการบันทึกภาคสนาม การบันทึกข้อสังเกตเชิงสะท้อนหลังการสังเกตชั้นเรียนและการแยกข้อมูลเชิงพรรณนาออกจากการตีความเชิงวิเคราะห์

บริบทการวิจัยและกลุ่มเป้าหมาย

บริบทการวิจัยคือชั้นเรียนคณิตศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ในโรงเรียนที่เข้าร่วม TLSOA ของคณะศึกษาศาสตร์มหาวิทยาลัยทักษิณ ตามบันทึกข้อตกลงความร่วมมือโดยโรงเรียนเข้าร่วมมาแล้วไม่น้อยกว่า 3 ปีการศึกษาทำให้ครูและนักเรียนมีความคุ้นเคยกับกระบวนการวิธีการแบบเปิดอย่างต่อเนื่อง

กลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 6 คน คัดเลือกแบบเจาะจงให้ครอบคลุมระดับความสามารถที่หลากหลาย ได้แก่ ระดับสูง 2 คน ระดับปานกลาง 2 คน และระดับต่ำ 2 คน โดยใช้รหัส S01-S06 แทนชื่อจริงของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายและใช้รหัส S07-S19 แทนนักเรียนคนอื่นในชั้นเรียนที่ถูกอ้างถึงในการอภิปรายร่วมกัน การใช้รหัสช่วยรักษาความลับของผู้เข้าร่วมวิจัยและทำให้สามารถติดตามพัฒนาการของแนวคิดนักเรียนแต่ละคนตลอด 4 คาบเรียนได้

หน่วยการเรียนรู้และการเก็บรวบรวมข้อมูล

หน่วยการเรียนรู้ที่ใช้คือความสัมพันธ์ระหว่างการบวกและการลบ จำนวน 4 คาบ ออกแบบให้ตำแหน่งของ □ ในประโยคสัญลักษณ์มีความซับซ้อนเพิ่มขึ้นอย่างเป็นลำดับ ตั้งแต่โครงสร้างที่ไม่ทราบผลลัพธ์ (result unknown) โครงสร้างที่ไม่ทราบจำนวนที่เพิ่มเข้าไป (missing addend) โครงสร้างที่ไม่ทราบจำนวนตั้งต้น (start unknown) และโครงสร้างที่ไม่ทราบจำนวนที่ถูกลบออก (missing subtrahend) ผ่านการสร้างโจทย์ปัญหาจากแบบจำลองแถบ ดัง Table 2 การจัดลำดับทั้ง 4 คาบเป็นการเพิ่มความซับซ้อนของโครงสร้างปัญหาและตำแหน่งของปริมาณที่ไม่ทราบค่าไม่ได้กำหนดให้แต่ละคาบสอดคล้องกับแกน GTG ใดแกนหนึ่งแบบหนึ่งต่อหนึ่งเพราะในคาบเดียวกันอาจปรากฏกิจกรรมทางพีชคณิตมากกว่าหนึ่งแกน ส่วนแบบจำลองแถบทำหน้าที่เป็นสื่อแทนความสัมพันธ์ในสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องมีใช้เงื่อนไขที่ต้องปรากฏในทุกกิจกรรมของ GTG

Table 2 รายละเอียดของหน่วยการเรียนรู้ที่ใช้ในการวิจัย

คาบ	สถานการณ์ปัญหาหลัก	โครงสร้างสมการ	เป้าหมายด้านการคิดเชิงพีชคณิต
1	เด็กเล่นในสนาม: เปรียบเทียบการเพิ่มและการลด	$a + b = \square$ และ $a - b = \square$ (โครงสร้างที่ไม่ทราบผลลัพธ์)	สร้างประโยคสัญลักษณ์จากสถานการณ์และสังเกตความสัมพันธ์บวก-ลบ
2	ผู้โดยสารรถบัส: รู้จำนวนเริ่มต้นและจำนวนรวม ต้องหาจำนวนที่เพิ่มขึ้น	$a + \square = c$ หรือ $c - a = \square$ (โครงสร้างที่ไม่ทราบจำนวนที่เพิ่มเข้าไป)	ใช้ □ แทนปริมาณที่ไม่ทราบค่าและใช้ความสัมพันธ์ผกผัน
3	กระดุมแม่เหล็ก: รู้จำนวนที่ให้ไปและที่เหลือ ต้องหาจำนวนตอนแรก	$\square = a + b$ หรือ $\square + b = c$ (โครงสร้างที่ไม่ทราบจำนวนตั้งต้น)	วิเคราะห์โครงสร้างของโจทย์แทนการพึ่งค่าสำคัญ
4	การสร้างโจทย์ปัญหาจากแบบจำลองแถบ: รวม 15 เหลือ 9 หายไป □	$c - \square = a$ และ $c - a = \square$ (โครงสร้างที่ไม่ทราบจำนวนที่ถูกลบออก)	สร้างโจทย์ปัญหาและประโยคสัญลักษณ์จากแบบจำลองแถบด้วยตนเอง

แหล่งข้อมูลประกอบด้วย 5 แหล่งหลักเพื่อให้สามารถตรวจสอบการคิดเชิงพีชคณิตจากทั้งชิ้นงาน คำพูด ปฏิสัมพันธ์และบริบทการสอนจริง ดัง Table 3

Table 3 แหล่งข้อมูลและบทบาทในการวิเคราะห์

แหล่งข้อมูล	บทบาทในการวิเคราะห์
ชิ้นงานนักเรียน	ใช้ตรวจสอบประโยชน์สัญลักษณ์ วิธีคำนวณ การใช้ □ และการสร้างโจทย์ปัญหาของนักเรียนแต่ละคน
โปรโตคอลชั้นเรียน	ใช้วิเคราะห์ถ้อยคำ การอธิบายเหตุผล การโต้ตอบระหว่างครูกับนักเรียนและการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน
ภาพถ่ายกระดาน	ใช้ตรวจสอบลำดับการนำเสนอแนวคิด การจัดวางแบบจำลองแถบและการเชื่อมโยงวิธีคิดของนักเรียนในพื้นที่สาธารณะของชั้นเรียน
บันทึกการสังเกตชั้นเรียน	ใช้บันทึกบริบท พฤติกรรมการเรียนรู้ การเลือกวิธีคิดและปฏิสัมพันธ์ที่ไม่ปรากฏในชิ้นงานนักเรียนโดยตรง
โปรโตคอลการคิดออกเสียง (Think-aloud Protocol)	ใช้ทำความเข้าใจกระบวนการคิดของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายในชั้นการเรียนรู้ด้วยตนเอง โดยเฉพาะเหตุผลในการเลือกวิธีดำเนินการ

เครื่องมือวิจัยและการตรวจสอบคุณภาพ

เครื่องมือวิจัยประกอบด้วยเครื่องมือสำหรับสังเกต บันทึก สัมภาษณ์หรือกระตุ้นการคิดและวิเคราะห์ชิ้นงานโดยออกแบบให้เชื่อมโยงกับตัวบ่งชี้ของโมเดล GTG และลักษณะการจัดการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิด ทั้งนี้ แหล่งข้อมูล 5 แหล่งและเครื่องมือวิจัย 4 ชนิดไม่ได้มีความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งแต่ทำหน้าที่ร่วมกันในการสร้างและตรวจสอบหลักฐานกล่าวคือแบบวิเคราะห์ชิ้นงานใช้กับชิ้นงานนักเรียนโดยตรง แบบสัมภาษณ์ถึงโครงสร้าง/โปรโตคอลการคิดออกเสียงใช้กระตุ้นและจัดเก็บคำอธิบายเหตุผลของนักเรียน แบบสังเกตชั้นเรียนและแบบบันทึกภาคสนามใช้บันทึกและตีความพฤติกรรมกับปฏิสัมพันธ์ที่เกิดขึ้น ขณะที่โปรโตคอลชั้นเรียนและภาพถ่ายกระดานเป็นหลักฐานจากเหตุการณ์ในชั้นเรียนที่ใช้ตรวจสอบและเชื่อมโยงกับข้อมูลจากเครื่องมือดังกล่าว การใช้ข้อมูลหลายแหล่งจึงมุ่งตรวจสอบหลักฐานเดียวกันจากมุมมองที่แตกต่างกัน (triangulation) มิใช่การจับคู่เครื่องมือกับแหล่งข้อมูลแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ดัง Table 4

Table 4 เครื่องมือวิจัยและวัตถุประสงค์ในการใช้

เครื่องมือวิจัย	วัตถุประสงค์ในการใช้
แบบสังเกตชั้นเรียน	บันทึกพฤติกรรม การแก้ปัญหา การอภิปรายและหลักฐานการคิดเชิงพีชคณิตตามโมเดล GTG
แบบสัมภาษณ์ถึงโครงสร้าง/โปรโตคอลการคิดออกเสียง	ใช้กระตุ้นให้นักเรียนอธิบายเหตุผล วิธีคิดและความหมายของสัญลักษณ์ □ ขณะหรือหลังการแก้ปัญหา
แบบบันทึกภาคสนาม	บันทึกบริบทของชั้นเรียน การใช้คำถามของครู การตอบสนองของนักเรียนและข้อสังเกตเชิงสะท้อนของผู้วิจัย
แบบวิเคราะห์ชิ้นงาน	ใช้จำแนกหลักฐานในชิ้นงานนักเรียนตามกิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิต กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการและกิจกรรมระดับอิมโนทัศน์

การตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือดำเนินการโดยผู้ทรงคุณวุฒิ 3 คนเพื่อตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหา ได้ค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับวัตถุประสงค์ (Index of Item-Objective Congruence: IOC) อยู่ระหว่าง 0.67-1.00 และตรวจสอบความเชื่อมั่นระหว่างผู้สังเกตด้วยค่าสัมประสิทธิ์แคปปาของโคเฮน (Cohen's Kappa) ได้ค่า 0.78 ซึ่งอยู่ในระดับความสอดคล้องในระดับมาก (substantial agreement) ตามเกณฑ์ของ Landis and Koch (1977)

การวิเคราะห์ข้อมูลและการตรวจสอบความน่าเชื่อถือ

การวิเคราะห์ข้อมูลดำเนินการเป็น 2 ระดับที่เชื่อมโยงกัน ระดับแรกผู้วิจัยถอดความโปรโตคอลและจัดระเบียบข้อมูลจากแหล่งต่าง ๆ แล้วเข้ารหัสหลักฐานตามโมเดล GTG ของ Kieran (2004) เพื่อจำแนกลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตเป็น 3 แกน พร้อมระบุรูปแบบย่อยที่ปรากฏ จากนั้นเปรียบเทียบหลักฐานข้ามคาบเรียน ข้ามแหล่งข้อมูลและข้ามนักเรียน กลุ่มเป้าหมาย ระดับที่สอง เมื่อพบพัฒนาการที่ต่อเนื่องของการใช้สัญลักษณ์ □ ผู้วิจัยจึงนำหลักฐานที่เกี่ยวข้องตลอด 4 คาบ มาตีความเพิ่มเติมด้วยแนวคิดของ Radford (2018) เพื่ออธิบายการเปลี่ยนความหมายของ □ จากช่องว่างสำหรับเติมผลลัพธ์ ไปสู่ตัวแทนปริมาณที่ไม่ทราบค่า

Table 5 ขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูล

ขั้นตอนการวิเคราะห์	รายละเอียดการดำเนินการ
1. การลดทอนข้อมูล (Data Reduction)	คัดเลือกหลักฐานที่เกี่ยวข้องกับการสร้างประโยคสัญลักษณ์ การใช้ □ การคำนวณ การตรวจสอบและการสรุปความสัมพันธ์
2. การเข้ารหัสข้อมูล (Coding) ตามโมเดล GTG	เข้ารหัสหลักฐานเป็นกิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิต กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการและกิจกรรมระดับอภิมโนทัศน์ พร้อมระบุรูปแบบย่อย
3. การแสดงข้อมูล (Data Display)	จัดทำตารางเปรียบเทียบข้ามคาบเรียน ข้ามแหล่งข้อมูลและข้ามนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย
4. การสรุปและตรวจสอบข้อสรุป (Conclusion Drawing)	สรุปลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตจากหลักฐานที่สอดคล้องกันและตรวจสอบความน่าเชื่อถือของข้อสรุป

การวิเคราะห์ข้อมูลดำเนินการตามแนวทางของ Miles et al. (2014) โดยประกอบด้วยการลดทอนข้อมูล การแสดงข้อมูลและการสรุป/ตรวจสอบข้อสรุป ผู้วิจัยใช้การตรวจสอบสามเส้า (triangulation) จากหลายแหล่งข้อมูล ได้แก่ ชิ้นงานนักเรียน โปรโตคอลชั้นเรียน ภาพถ่ายกระดาน บันทึกการสังเกตและโปรโตคอลการคิดออกเสียง รวมทั้งใช้การตรวจสอบข้อมูลกับผู้มีส่วนร่วม (member checking) การอภิปรายกับเพื่อนนักวิจัย (peer debriefing) การบรรยายบริบทอย่างหนาแน่น (thick description) และการจัดทำร่องรอยการตรวจสอบกระบวนการวิจัย (audit trail) ตามแนวทางของ Lincoln and Guba (1985)

ผลการวิจัย

ในส่วนผลการวิจัย คำว่า “กิจกรรม” หมายถึงหมวดของกิจกรรมทางพีชคณิตที่จำแนกจากการกระทำ คำอธิบายและชิ้นงานของนักเรียนตามโมเดล GTG มีขั้นตอนการสอนของวิธีการแบบเปิด จากการวิเคราะห์ข้อมูลตลอด 4 คาบ พบว่านักเรียนแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตครบทั้ง 3 แกนของโมเดล GTG รวม 11 รูปแบบย่อย ได้แก่ กิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิต 4 รูปแบบ กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการ 4 รูปแบบและกิจกรรมระดับอภิมโนทัศน์ 3 รูปแบบ ดัง Table 6

Table 6 ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่พบตามโมเดล GTG

แกนของโมเดล GTG	รูปแบบย่อยที่พบ
กิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิต	1) สร้างประโยคสัญลักษณ์จากสถานการณ์ 2) ใช้ □ แทนปริมาณที่ไม่ทราบค่า 3) ใช้แบบจำลองแถบแสดงความสัมพันธ์แบบส่วนย่อย-ส่วนรวม 4) สร้างโจทย์ปัญหา

แกนของโมเดล GTG	รูปแบบย่อยที่พบ
กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการ	1) หาค่าใน $\square$ ด้วยการคำนวณ 2) ใช้ความสัมพันธ์ผกผัน 3) ตรวจสอบความสมเหตุสมผล 4) เลือกวิธีคำนวณตามโครงสร้าง
กิจกรรมระดับอิมโนทัศน์	1) สรุปความสัมพันธ์บวก-ลบ 2) ให้เหตุผลสนับสนุนการเลือกดำเนินการ 3) ประยุกต์ความเข้าใจในบริบทใหม่

กิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิต

นักเรียนสามารถแปลงสถานการณ์ในชีวิตจริงให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ได้อย่างมีความหมาย ตัวอย่างจากคาบที่ 1 S05 อธิบายว่า “8 มาจากเด็กในตอนแรกที่เล่นอยู่ เครื่องหมายบวกมาจากคำว่าเพิ่ม 4 คือเด็กที่มาเพิ่มและ 12 คือจำนวนเด็กทั้งหมด” การอธิบายดังกล่าวแสดงว่านักเรียนไม่ได้เพียงเขียนสมการตามแบบแต่สามารถเชื่อมโยงองค์ประกอบของสมการกับองค์ประกอบของสถานการณ์ได้

ในคาบที่ 1 การใช้ $\square$ ยังมีลักษณะเป็นช่องว่างท้ายสมการ เช่น $a + b = \square$ หรือ $a - b = \square$ ซึ่งใกล้เคียงกับประสบการณ์เลขคณิตเดิมของนักเรียนแต่เมื่อเข้าสู่คาบที่ 2 นักเรียนเริ่มใช้ $\square$ อยู่กลางสมการเพื่อแทนจำนวนที่ยังไม่ทราบค่า เช่น $27 + \square = 34$ การอธิบายของ S02 ว่า “ไม่รู้ว่ามีคนเพิ่มคือเท่าไร ก็เลยใช้สี่เหลี่ยมแทน” แสดงให้เห็นว่าความหมายของ $\square$ เริ่มเคลื่อนจากช่องว่างสำหรับเติมผลลัพธ์ไปสู่ตัวแทนของปริมาณที่ไม่ทราบค่าในสถานการณ์ปัญหา

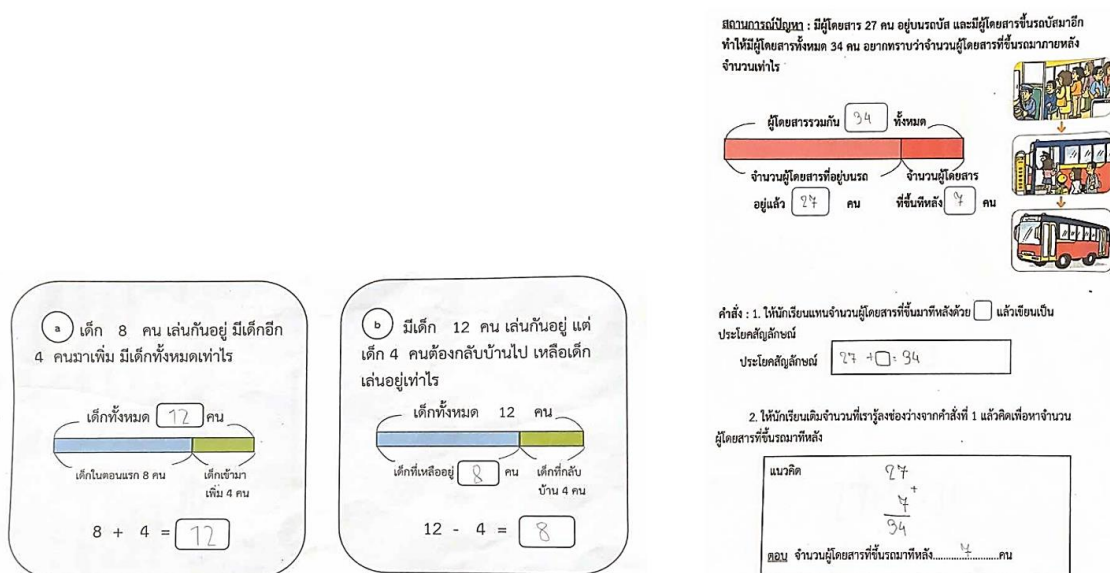


Figure 1 ตัวอย่างชิ้นงานนักเรียนในคาบที่ 1 และคาบที่ 2

แสดงพัฒนาการของสัญลักษณ์ $\square$ จากช่องว่างท้ายสมการไปสู่ตัวแทนปริมาณที่ไม่ทราบค่าในตำแหน่งกลางสมการ

จาก Figure 1 พบว่านักเรียนในคาบที่ 1 และคาบที่ 2 แสดงให้เห็นพัฒนาการของการใช้สัญลักษณ์ □ อย่างชัดเจน กล่าวคือ ในคาบที่ 1 นักเรียนใช้ □ ในตำแหน่งท้ายสมการ เช่น $8 + 4 = \square$ และ $12 - 4 = \square$ ซึ่งสะท้อนการมอง □ ในฐานะช่องว่างสำหรับเติมผลลัพธ์แต่ในคาบที่ 2 นักเรียนเริ่มใช้ □ ในตำแหน่งกลางสมการ เช่น $27 + \square = 34$ เพื่อแทนจำนวนผู้โดยสารที่ขึ้นรถภายหลังซึ่งยังไม่ทราบค่า การเปลี่ยนตำแหน่งของ □ ดังกล่าวสะท้อนการเคลื่อนจากการคิดเชิงเลขคณิตไปสู่การเริ่มมองสัญลักษณ์ในฐานะตัวแทนของปริมาณที่ไม่ทราบค่าในโครงสร้างสมการ

แบบจำลองแถบมีบทบาทเป็นสื่อกลางระหว่างสถานการณ์รูปธรรมกับประโยคสัญลักษณ์ นักเรียนสามารถระบุส่วนรวมและส่วนย่อยจากแถบสรวมทั้งใช้แบบจำลองแถบเป็นฐานในการสร้างโจทย์ปัญหาด้วยตนเองในคาบที่ 4 เช่น โจทย์ลูกอมที่มีทั้งหมด 15 เม็ด เหลือ 9 เม็ดและต้องหาจำนวนที่หายไป การสร้างโจทย์ปัญหาในลักษณะนี้สะท้อนว่านักเรียนไม่ได้ทำเพียงการคำนวณตามโจทย์ที่กำหนดแต่สามารถสร้างสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์จากโครงสร้างความสัมพันธ์ที่มองเห็นได้

กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการ

นักเรียนแสดงกิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการผ่านการคำนวณหาค่าใน □ ด้วยวิธีที่หลากหลาย ทั้งการตั้งลบแนวตั้ง การเติมจำนวนในสมการและการใช้ความสัมพันธ์ผกผันระหว่างการบวกและการลบ ความหลากหลายของวิธีสะท้อนคุณลักษณะของวิธีการแบบเปิดที่เปิดพื้นที่ให้นักเรียนใช้แนวคิดตามศักยภาพของตนเอง

ในคาบที่ 2 สถานการณ์ผู้โดยสารรถบัสทำให้นักเรียนเห็นว่าสถานการณ์เดียวกันสามารถเขียนได้ทั้ง $27 + \square = 34$ และ $34 - 27 = \square$ ซึ่งให้คำตอบเดียวกันคือ 7 คน ข้อสรุปนี้ช่วยให้นักเรียนเริ่มมองเห็นความสัมพันธ์ผกผันระหว่างการบวกและการลบในฐานะเครื่องมือแก้ปัญหาไม่ใช่เพียงขั้นตอนการคำนวณที่แยกจากกัน

การตรวจสอบความสมเหตุสมผลปรากฏชัดในคาบที่ 3 เมื่อมีคำตอบ 12 จากการตีความโจทย์คลาดเคลื่อน ครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบว่าหากตอนแรกมีเพียง 12 เม็ด แต่เหลืออยู่ 18 เม็ด ย่อมเป็นไปได้เพราะจำนวนตอนแรกควรมากกว่าจำนวนที่เหลือ การตรวจสอบนี้สะท้อนการให้เหตุผลเชิงความสัมพันธ์ (relational reasoning) ซึ่งเป็นกิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการในระดับสูง เนื่องจากนักเรียนต้องพิจารณาความสัมพันธ์ของปริมาณทั้งระบบไม่ใช่เพียงเลือกเครื่องหมายตามคำสำคัญ



Figure 2 การอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนในคาบที่ 3

เพื่อเปรียบเทียบแนวคิดคลาดเคลื่อนกับแนวคิดที่ใช้ความสัมพันธ์ผกผันในการหาจำนวนตั้งต้น

จาก Figure 2 พบว่ากระดานในคาบที่ 3 แสดงให้เห็นบทบาทของการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนในการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของแนวคิดนักเรียน โดยในสถานการณ์กระดุมแม่เหล็ก นักเรียนบางคนเลือกใช้การลบจากคำสำคัญในโจทย์ เช่น $6 - 18 = \square$ หรือ $18 - 6 = 12$ ขณะที่นักเรียนอีกกลุ่มหนึ่งใช้การคิดย้อนกลับเป็น $18 + 6 = \square$ เพื่อหาจำนวนกระดุมแม่เหล็กในตอนแรก การนำแนวคิดทั้งสองแบบมาเปรียบเทียบบนกระดานช่วยให้นักเรียนเห็นว่า การเลือกวิธีดำเนินการไม่ควรพิจารณาจากคำสำคัญเพียงอย่างเดียวแต่ต้องวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่หายไป จำนวนที่เหลือ และจำนวนตอนแรก

กิจกรรมระดับอภิมโนทัศน์

นักเรียนพัฒนาการสรุปความสัมพันธ์จากระดับเฉพาะกรณีไปสู่ระดับหลักการ กล่าวคือคาบที่ 1 สรุปว่าผลของการบวกและการลบต่างกัน คาบที่ 2 สรุปว่าเป็นการบวกก็ได้ เป็นการลบก็ได้ คาบที่ 3 สรุปว่าต้องดูว่าโจทย์ถามอะไร ไม่ใช่ฟังคำสำคัญและคาบที่ 4 สรุปว่าโจทย์ปัญหาจะเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับโครงสร้างที่เราสร้าง ลำดับดังกล่าวแสดงให้เห็นว่านักเรียนค่อย ๆ ยกระดับจากการเปรียบเทียบผลลัพธ์เฉพาะกรณีไปสู่การอธิบายหลักการเลือกวิธีดำเนินการจากโครงสร้างของสถานการณ์

การให้เหตุผลสนับสนุนการเลือกดำเนินการปรากฏเมื่อ S19 อธิบายว่าเลือกการลบเพราะรู้จำนวนทั้งหมดและรู้จำนวนที่มีอยู่แล้ว จึงนำมาลบเพื่อหาจำนวนที่เพิ่มขึ้นเหตุผลนี้แสดงว่านักเรียนใช้โครงสร้างของปัญหาเป็นฐานในการเลือกวิธี ไม่ใช่เพียงเลือกตามคำสำคัญหรือความเคยชิน

ในคาบที่ 4 นักเรียนประยุกต์โครงสร้าง “รู้จำนวนรวม รู้จำนวนที่เหลือ หาจำนวนที่หายไป” ไปสร้างโจทย์ในบริบทใหม่ เช่น ลูกอม กระดุมและไอศกรีม ความสามารถในการถอดโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ออกจากบริบทหนึ่งและนำไปใช้กับบริบทใหม่เป็นหลักฐานของกิจกรรมระดับอภิมโนทัศน์เพราะนักเรียนสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ทั่วไปที่อยู่เหนือบริบทเฉพาะของโจทย์เดิม

ข้อค้นพบสำคัญ (พัฒนาการของ □ จากช่องว่างสู่ตัวแทนปริมาณที่ไม่ทราบค่า)

ภายหลังการจำแนกหลักฐานการคิดเชิงพีชคณิตด้วยโมเดล GTG ผู้วิจัยพิจารณาหลักฐานที่เกี่ยวข้องกับการใช้สัญลักษณ์ □ ซ้ำทั้ง 4 คาบเพิ่มเติมและใช้แนวคิดของ Radford (2018) เป็นกรอบตีความเสริมพบพัฒนาการของสัญลักษณ์ □ จากเครื่องหมายสำหรับเติมคำตอบไปสู่ตัวแทนของปริมาณที่ไม่ทราบค่าในโครงสร้างสมการ ดัง Table 7

Table 7 พัฒนาการของ □ ตลอด 4 คาบและการตีความด้วยแนวคิดของ Radford (2018)

คาบ	ตำแหน่งของ □	ความหมายที่นักเรียนแสดง	ระดับการสรุป	หลักฐานเชิงตีความ
1	ท้ายสมการ	ช่องว่างสำหรับเติมผลลัพธ์	การสรุปทั่วไปจากข้อเท็จจริงเฉพาะกรณี	นักเรียนเชื่อมโยงสถานการณ์กับประโยคสัญลักษณ์ $a + b = \square$ หรือ $a - b = \square$
2	กลางสมการ	จำนวนที่เพิ่มขึ้นแต่ยังไม่รู้ค่า	การสรุปทั่วไปเชิงบริบทระยะเริ่มต้น	นักเรียนอธิบายว่าใช้ □ เพราะยัง 모르จำนวนที่เพิ่มในสถานการณ์ผู้โดยสารรถบัส
3	ต้นสมการ	จำนวนตั้งต้นที่ไม่รู้ ต้องวิเคราะห์จากโครงสร้างโจทย์	การสรุปทั่วไปเชิงบริบท	นักเรียนตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบและอธิบายว่าต้องดูโครงสร้างของโจทย์
4	หลายตำแหน่งของสมการ	ตัวแทนปริมาณที่ไม่ทราบค่า ซึ่งนักเรียนกำหนดได้เอง	การสรุปทั่วไปเชิงสัญลักษณ์บางส่วน	นักเรียนสร้างโจทย์และประโยคสัญลักษณ์จากแบบจำลองแถบ เช่น $15 - \square = 9$



Figure 3 การอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนในคาบที่ 4 แสดงการใช้ □ ในหลายตำแหน่งของสมการจากการสร้างโจทย์ปัญหาด้วยแบบจำลองแถบ

จาก Figure 3 พบว่ากระดานในคาบที่ 4 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถใช้แบบจำลองแถบเป็นฐานในการสร้างโจทย์ปัญหาและเขียนประโยคสัญลักษณ์ได้ด้วยตนเองโดยแบบจำลองแถบกำหนดจำนวนรวมทั้งหมด 15 จำนวนที่เหลือ 9 และจำนวนที่หายไปเป็น □ นักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์ได้หลายรูปแบบ เช่น $15 - \square = 9$, $15 - 9 = \square$, $9 + \square = 15$ และ $\square + 9 = 15$ การปรากฏของ □ ในหลายตำแหน่งของสมการสะท้อนว่านักเรียนเริ่มเข้าใจ □ ในฐานะตัวแทนของปริมาณที่ไม่ทราบค่าไม่ใช่เพียงช่องว่างท้ายสมการสำหรับเติมคำตอบ

พัฒนาการนี้สะท้อนการเปลี่ยนสถานะของ □ จากสัญลักษณ์ตอบรับในโจทย์เลขคณิตไปสู่สัญลักษณ์เชิงพีชคณิตที่นักเรียนใช้แทนปริมาณที่ไม่ทราบค่าและสามารถจัดวางในโครงสร้างสมการได้อย่างยืดหยุ่น การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวไม่ได้เกิดจากการบอกความหมายของสัญลักษณ์โดยตรงเท่านั้นแต่เกิดจากการเผชิญปัญหาที่ทำให้ตำแหน่งของปริมาณที่ไม่ทราบค่าเปลี่ยนไปอย่างเป็นลำดับ

บทบาทของกระบวนการวิธีการแบบเปิดต่อหลักฐานการคิดเชิงพีชคณิต

เมื่อพิจารณาผลการวิจัยในบริบทของวิธีการแบบเปิดพบว่าการคิดเชิงพีชคณิตไม่ได้เกิดขึ้นเฉพาะในขั้นการคำนวณแต่ปรากฏตลอดกระบวนการเรียนรู้ ตั้งแต่การทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา การสร้างวิธีคิดของตนเอง การอภิปรายเปรียบเทียบไปจนถึงการสรุปเชื่อมโยงแนวคิด ดัง Table 8

Table 8 บทบาทของกระบวนการวิธีการแบบเปิดต่อการคิดเชิงพีชคณิต

ขั้นตอนของวิธีการแบบเปิด	บทบาทต่อการคิดเชิงพีชคณิต
ขั้นที่ 1 การนำเสนอสถานการณ์ปัญหาปลายเปิด	ช่วยให้นักเรียนระบุปริมาณที่รู้และไม่รู้และเตรียมความพร้อมในการมองความสัมพันธ์แบบส่วนย่อย-ส่วนรวมผ่านแบบจำลองแถบ
ขั้นที่ 2 การเรียนรู้ด้วยตนเอง	เป็นพื้นที่ที่นักเรียนสร้างประโยคสัญลักษณ์ใช้ □ และเลือกวิธีดำเนินการด้วยตนเองจึงเห็นกิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิตและกิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการอย่างหลากหลาย
ขั้นที่ 3 การอภิปรายและเปรียบเทียบทั้งชั้นเรียน	ทำให้แนวคิดที่แตกต่างถูกนำมาตรวจสอบเปรียบเทียบและขัดเกลา โดยเฉพาะการตรวจสอบความสมเหตุสมผลและการก้าวข้ามกลยุทธ์การใช้ค่าสำคัญ
ขั้นที่ 4 การสรุปและเชื่อมโยงแนวคิด	เป็นพื้นที่สำคัญของกิจกรรมระดับอภิปรายเพราะนักเรียนร่วมกันยกระดับข้อสรุปจากกรณีเฉพาะไปสู่หลักการทั่วไปและใช้เป็นฐานคิดในคาบถัดไป

ลักษณะดังกล่าวชี้ให้เห็นว่าการเรียนรู้ด้วยวิธีการแบบเปิดมีลักษณะเป็นวัฏจักรสะสม กล่าวคือข้อสรุปจากการอภิปรายและการสรุปในคาบหนึ่งกลายเป็นฐานคิดสำหรับการเผชิญปัญหาใหม่ในคาบถัดไปทำให้ความซับซ้อนของการคิดเชิงพีชคณิตเพิ่มขึ้นตามลำดับ

อภิปราย และข้อเสนอแนะ

ผลการวิจัยยืนยันว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 สามารถแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตครบทั้ง 3 แกนของโมเดล GTG ได้แก่ กิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิต กิจกรรมการดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือสมการ และกิจกรรมระดับอิมโนทัศน์ได้ หากได้รับการออกแบบประสบการณ์การเรียนรู้ที่เน้นการสร้างความสัมพันธ์ การให้เหตุผล และการอภิปรายร่วมกัน ผลนี้สอดคล้องกับ Carragher et al. (2006) ที่ชี้ว่านักเรียนประถมศึกษาตอนต้นสามารถเข้าใจแนวคิดเชิงพีชคณิตได้เมื่อการเรียนรู้เน้นความสัมพันธ์เชิงระบบและสอดคล้องกับ Ellis and Özgür (2024) ที่สรุปว่าแนวโน้มสำคัญของงานวิจัยด้านพีชคณิตร่วมสมัยคือการยืนยันศักยภาพของนักเรียนประถมศึกษาในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต โดยเฉพาะเมื่อการเรียนการสอนเน้นการคิดเชิงวิเคราะห์และการคิดเชิงโครงสร้างมากกว่าการคำนวณเพื่อหาคำตอบเพียงอย่างเดียว

ข้อค้นพบเรื่องพัฒนาการของสัญลักษณ์ □ จาก “ช่องว่างท้ายสมการ” ไปสู่ “ตัวแทนปริมาณที่ไม่ทราบค่าในทุกตำแหน่งของสมการ” สะท้อนการเปลี่ยนผ่านจากการคิดเชิงเลขคณิตไปสู่การคิดเชิงพีชคณิตอย่างเป็นลำดับ ผลนี้สอดคล้องกับ Radford (2018) ที่อธิบายว่าการสร้างสัญลักษณ์ทางพีชคณิตของเด็กพัฒนาจากการอิงข้อเท็จจริงเฉพาะกรณีไปสู่การอธิบายในบริบทและค่อย ๆ เคลื่อนไปสู่การใช้สัญลักษณ์เชิงนามธรรม อีกทั้งยังสอดคล้องกับ Torres et al. (2024) ที่พบว่านักเรียนพัฒนาจากการอธิบายความสัมพันธ์เฉพาะกรณีไปสู่การสรุปความสัมพันธ์ที่เป็นทั่วไปมากขึ้น ในงานวิจัยนี้การที่นักเรียนสามารถสร้างประโยค $15 - \square = 9$ ด้วยตนเองจึงเป็นหลักฐานของการเริ่มใช้สัญลักษณ์ในระดับการสรุปทั่วไปเชิงสัญลักษณ์บางส่วน

บทบาทของแบบจำลองแถบในงานวิจัยนี้สอดคล้องกับ Cai et al. (2011) ที่ชี้ให้เห็นบทบาทของการแทนเชิงภาพ (pictorial representations/equations) ในการช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์เชิงปริมาณและเชื่อมโยงไปสู่การคิดเชิงพีชคณิต อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้เพิ่มเติมว่าแบบจำลองแถบไม่ได้ทำหน้าที่เพียงเป็นสื่อช่วยแก้โจทย์แต่ยังเป็นฐานสำหรับการสร้างโจทย์ปัญหาซึ่งเป็นกิจกรรมการสร้างหรือแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิตในระดับสูง เมื่อนักเรียนต้องอ่านความสัมพันธ์จากแผนภาพและสร้างโจทย์ปัญหาดด้วยตนเอง ประเด็นนี้สอดคล้องกับ Cai and Rott (2024) ที่อธิบายว่าการสร้างโจทย์ปัญหาเป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน ประกอบด้วยทำความเข้าใจสถานการณ์ การเชื่อมโยงข้อมูล การสร้างปัญหาและการสะท้อนผล

กรณีของ S04 ที่พึ่งพากลยุทธ์การใช้คำสำคัญ (keyword strategy) ในคาบที่ 3 โดยเลือกการลบจากคำว่า “เหลือ” แทนการวิเคราะห์โครงสร้างของปัญหาแสดงให้เห็นว่านักเรียนประถมศึกษาบางส่วนยังมีแนวโน้มเลือกวิธีดำเนินการจากคำสำคัญ อย่างไรก็ตามกระบวนการอภิปรายทั้งชั้นเรียนและการตรวจสอบความสมเหตุสมผลช่วยให้นักเรียนค่อย ๆ เปลี่ยนจากกลยุทธ์การใช้คำสำคัญไปสู่การคิดเชิงโครงสร้างได้ ข้อค้นพบนี้มีนัยสำคัญต่อบริบทไทย เนื่องจาก Thinwiangthong et al. (2024) พบว่าชั้นเรียนคณิตศาสตร์ในประเทศไทยโดยทั่วไปยังมีแนวโน้มเน้นคำตอบมากกว่ากระบวนการและการสื่อสารสัญลักษณ์ ดังนั้นการอภิปรายทั้งชั้นเรียนอย่างมีเจตนาในวิธีการแบบเปิดภายใต้ TLSOA จึงไม่เพียงส่งเสริมการคิดเชิงพีชคณิตแต่ยังช่วยพัฒนาการสื่อสารทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลเชิงโครงสร้างของนักเรียนด้วย

เมื่อพิจารณากลไกที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนบทบาทของครูจึงไม่ได้อยู่ที่การบอกเครื่องหมายหรือวิธีคำนวณที่ถูกต้องโดยตรงแต่เป็นการจัดให้แนวคิดที่แตกต่าง รวมถึงแนวคิดที่คลาดเคลื่อน ได้เข้าสู่การอภิปรายร่วมกันเพื่อให้นักเรียนพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ ตรวจสอบความสมเหตุสมผลและเชื่อมโยงสถานการณ์ปัญหา แบบจำลองแถบและประโยคสัญลักษณ์ กระบวนการดังกล่าวเป็นกลไกหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนค่อย ๆ เคลื่อนจากการเลือกวิธีดำเนินการตามคำสำคัญไปสู่การให้เหตุผลจากโครงสร้างของปัญหา

องค์ความรู้ใหม่จากการวิจัยนี้คือ “โมเดลพัฒนาการของ □ ในฐานะสัญลักษณ์เชิงพีชคณิตระยะแรกผ่านวิธีการแบบเปิด” ซึ่งอธิบายว่าการออกแบบปัญหาที่เปลี่ยนตำแหน่งของ □ อย่างเป็นลำดับ จากท้ายสมการ กลางสมการ ต้นสมการและ

หลายตำแหน่ง ประกอบกับแบบจำลองแถบและการอภิปรายทั้งชั้นเรียนช่วยให้นักเรียนเปลี่ยนความเข้าใจจากการมอง □ เป็นช่องว่างสำหรับเติมคำตอบไปสู่การมอง □ เป็นตัวแทนของปริมาณที่ไม่ทราบค่า โมเดลนี้ชี้ให้เห็นว่าพีชคณิตระยะแรกสามารถเกิดขึ้นได้ในหน่วยการเรียนรู้เลขคณิตปกติ หากครูออกแบบโครงสร้างของสถานการณ์อย่างมีเจตนา

ข้อจำกัดของการวิจัย

การวิจัยนี้มีข้อจำกัดในการตีความผลการวิจัย ประการแรกการวิจัยใช้รูปแบบเชิงคุณภาพตามแนวทางชาติพันธุ์วรรณาในชั้นเรียน โดยศึกษานักเรียนกลุ่มเป้าหมายจำนวน 6 คน ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ที่ใช้วิธีการแบบเปิด ดังนั้นผลการวิจัยจึงมุ่งอธิบายลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตในบริบทเฉพาะมากกว่าการสรุปอ้างอิงเชิงสถิติไปยังนักเรียนทั่วไป ประการที่สองการเก็บข้อมูลดำเนินการในหน่วยการเรียนรู้เรื่องความสัมพันธ์ระหว่างการบวกและการลบ จำนวน 4 คาบเรียน จึงสะท้อนพัฒนาการของการคิดเชิงพีชคณิตในช่วงเวลาจำกัด โดยเฉพาะการใช้สัญลักษณ์ □ แบบจำลองแถบและความสัมพันธ์ระหว่างการบวกกับการลบ ผลการวิจัยจึงยังไม่ครอบคลุมมิติอื่นของการคิดเชิงพีชคณิต เช่น การคิดเชิงฟังก์ชัน การสรุปทั่วไปจากแบบรูปหรือการใช้ตัวแปรในรูปแบบทางการ ประการที่สามบริบทการวิจัยเป็นชั้นเรียนที่ครูและนักเรียนมีประสบการณ์กับวิธีการแบบเปิดอย่างต่อเนื่อง การนำผลการวิจัยไปประยุกต์ใช้จึงควรคำนึงถึงความพร้อมของครู ประสบการณ์ของนักเรียน วัฒนธรรมการอภิปรายในชั้นเรียนและการสนับสนุนจากทีมการศึกษาชั้นเรียน

อย่างไรก็ตามผู้วิจัยได้เพิ่มความน่าเชื่อถือของข้อมูลด้วยการตรวจสอบสามเส้า การตรวจสอบข้อมูลกับผู้มีส่วนร่วมการอภิปรายกับเพื่อนนักวิจัยและการใช้หลักฐานเชิงประจักษ์จากชิ้นงานนักเรียน โปรโตคอลชั้นเรียนและภาพถ่ายกระดาน เพื่อให้การตีความผลการวิจัยมีความโปร่งใสและตรวจสอบได้

ข้อเสนอแนะในการนำผลวิจัยไปใช้

1. ครูผู้สอนควรออกแบบปัญหาปลายเปิดที่เปิดโอกาสให้นักเรียนพบสัญลักษณ์ □ ในตำแหน่งต่าง ๆ ของสมการอย่างเป็นลำดับ ตั้งแต่ท้ายสมการ กลางสมการ ต้นสมการและหลายตำแหน่งของสมการเพื่อพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับปริมาณที่ไม่ทราบค่าอย่างต่อเนื่อง
2. ครูควรใช้แบบจำลองแถบเป็นสื่อกลางในการเชื่อมโยงสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับโครงสร้างของสมการอย่างเป็นระบบ โดยเฉพาะกิจกรรมที่ให้นักเรียนอ่าน ตีความและสร้างโจทย์ปัญหาจากแบบจำลองแถบด้วยตนเอง
3. ในการอภิปรายทั้งชั้นเรียนครูควรจัดลำดับการนำเสนอแนวคิดของนักเรียนอย่างมีเจตนาโดยเปิดพื้นที่ให้ทั้งแนวคิดที่ถูกต้องและแนวคิดที่คลาดเคลื่อนถูกนำมาอภิปรายร่วมกันพร้อมใช้คำถามกระตุ้นที่มุ่งความสัมพันธ์และโครงสร้าง เช่น “โจทย์นี้เรารู้อะไรและยังไม่รู้อะไร” “จำนวนแต่ละจำนวนสัมพันธ์กันอย่างไร” “คำตอบนี้สมเหตุสมผลหรือไม่ เพราะเหตุใด” และ “สามารถเขียนความสัมพันธ์นี้เป็นประโยคสัญลักษณ์แบบอื่นได้หรือไม่” เพื่อให้นักเรียนตรวจสอบความสมเหตุสมผล เปรียบเทียบวิธีคิด เชื่อมโยงแบบจำลองแถบกับประโยคสัญลักษณ์และก้าวข้ามการเลือกเครื่องหมายจากค่าสำคัญไปสู่การวิเคราะห์โครงสร้างของปัญหา
4. ผู้พัฒนาหลักสูตรและครูในระดับประถมศึกษาตอนต้นควรกำหนดเป้าหมายด้านพีชคณิตระยะแรกให้ชัดเจนยิ่งขึ้น โดยเฉพาะการใช้สัญลักษณ์แทนปริมาณที่ไม่ทราบค่า การวิเคราะห์โครงสร้างแบบส่วนย่อย-ส่วนรวมและการสร้างโจทย์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยไม่จำเป็นต้องเพิ่มเนื้อหาพีชคณิตเป็นหน่วยแยกต่างหาก

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรขยายระยะเวลาการเก็บข้อมูลให้ครอบคลุมหนึ่งภาคเรียนหรือหนึ่งปีการศึกษาเพื่อศึกษาพัฒนาการของการคิดเชิงพีชคณิตอย่างต่อเนื่อง
2. ควรศึกษาการคิดเชิงพีชคณิตในมิติอื่น เช่น การคิดเชิงฟังก์ชัน (functional thinking) และการสรุปทั่วไปจากแบบรูป (pattern generalization) เพื่อขยายความเข้าใจเกี่ยวกับพีชคณิตระยะแรกในระดับประถมศึกษาตอนต้น

3. ควรเปรียบเทียบลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตระหว่างชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิดกับชั้นเรียนทั่วไปเพื่ออธิบายบทบาทของบริบทการเรียนรู้ที่แตกต่างกัน

4. ควรศึกษาบทบาทของครูในการตั้งคำถาม การเลือกแนวคิดนักเรียนและการเชื่อมโยงแนวคิดระหว่างการอภิปรายทั้งชั้นเรียนเพื่อทำความเข้าใจกลไกที่ทำให้การคิดเชิงพีชคณิตพัฒนาขึ้นในชั้นเรียนจริง

จริยธรรมการวิจัย

การวิจัยนี้ได้รับการรับรองจากคณะกรรมการจริยธรรมการวิจัยในคน มหาวิทยาลัยทักษิณ เลขที่รับรอง COA No. TSU 2025_368, REC No. 0764 โครงการวิจัยรหัส 296/68 ผู้วิจัยดำเนินการตามหลักจริยธรรมการวิจัยในมนุษย์โดยได้รับความยินยอมจากผู้เกี่ยวข้องใช้รหัสแทนชื่อจริงของนักเรียน ครูและโรงเรียนจัดเก็บข้อมูลเป็นความลับและนำเสนอผลการวิจัยโดยไม่เปิดเผยข้อมูลที่สามารถระบุตัวบุคคลได้

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2568 คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

References

- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears. *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-77.
- Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I., & Strachota, S. (2019). Does early algebra matter? The effectiveness of an early algebra intervention in grades 3 to 5. *American Educational Research Journal*, 56(5), 1930-1972.
- Bunlang, S., Inprasitha, M., & Changsri, N. (2024). Students' mathematization in mathematics classrooms using the Thailand Lesson Study Incorporated Open Approach model. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 13(1), 14-27.
- Cai, J., Ng, S. F., & Moyer, J. C. (2011). Developing students' algebraic thinking in earlier grades: Lessons from China and Singapore. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 25-41). Springer.
- Cai, J., & Rott, B. (2024). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM - Mathematics Education*, 56(1), 61-71.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Ernest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87-115.
- Ellis, A. B., & Özgür, Z. (2024). Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. *ZDM - Mathematics Education*, 56(2), 199-210.
- Inprasitha, M. (2022). Lesson study and open approach development in Thailand: A longitudinal study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 11(5), 1-15.

- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it?. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 33(1), 159-174.
- Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. SAGE Publications.
- Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldaña, J. (2014). *Qualitative data analysis: A methods sourcebook (3rd ed.)*. SAGE Publications.
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3-25). Springer
- Sun, S., Sun, D., & Xu, T. (2023). The developmental progression of early algebraic thinking of elementary school students. *Journal of Intelligence*, 11(12), Article 222.
- Thinwiangthong, S., Ya-amphan, D., Sythong, P., & Ishizaka, H. (2024). The investigation of best practices on symbolic mathematical communication: A comparative study in Japan, Lao PDR, and Thailand. *Malaysian Journal of Learning and Instruction*, 21(1), 67-101.
- Torres, M. D., Moreno, A., Vergel, R., & Cañadas, M. C. (2024). The evolution from “I think it plus three” towards “I think it is always plus three.” Transition from arithmetic generalization to algebraic generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22, 971-991.
- Wilkie, K. J., & Hopkins, S. (2024). Generalizing actions with the subtraction-compensation property: Primary students’ algebraic thinking with tasks involving vertical towers of blocks. *Educational Studies in Mathematics*, 115(3), 433-458.