

ขนาดของเซต

ผู้เขียน

ประสิทธิ์ กิจจนศิริ¹

พิจารณาขนาดหรือจำนวนสมาชิกในเซตต่อไปนี้ $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c\}$ และ $C=\{1, 2\}$ ทุกๆ คนคงตอบเช่นเดียวกันว่า A และ B มีขนาดเท่ากัน ซึ่งเขียนแทนด้วย $|A|=|B|$ เนื่องจากนับจำนวนสมาชิกในเซตทั้งสองได้เป็นจำนวนเท่ากันคือ 3 และ $|C|<|A|$, $|C|<|B|$ เนื่องจากนับจำนวนสมาชิกใน C ได้เพียง 2 สมาชิกเท่านั้น หรืออาจพิจารณาได้อีกนัยหนึ่งว่า เนื่องจาก C เป็นเซตย่อยแท้ (proper subset) ของ A ซึ่งก็คือ C มีสมาชิกเพียงบางส่วนของ A เท่านั้น แต่ไม่ครบทุกสมาชิกใน A จึงทำให้ได้ว่า $|C|<|A|=|B|$ การพิจารณาขนาดของเซตทั้งสามข้างต้นนี้สามารถทำได้ไม่ยากเนื่องจากทั้งสามเซตเป็นเซตจำกัด (finite set) แต่หากเป็นเซตอนันต์ (infinite set) แล้ว การพิจารณาขนาดของเซตนั้นจะมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

ในตอนนี้นำให้ลองพิจารณาเซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}=\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ และเซตของจำนวนเต็มคู่ $E=\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ เห็นได้ชัดว่าเราไม่สามารถนับจำนวนสมาชิกของทั้ง $\mathbb{Z}$ และ E แล้วสรุปออกมาเป็นจำนวนเต็มค่าใดค่าหนึ่งได้ เนื่องจากกระบวนการนับนี้จะไม่สิ้นสุด แต่จะเห็นว่า $\mathbb{Z} \neq E$ และยิ่งกว่านั้น E เป็นเซตย่อยแท้ของ $\mathbb{Z}$ ซึ่งหากพิจารณา

เพียงเท่านี้ หลายคนคงจะด่วนสรุปตอบไปแล้วว่า $|E|<|\mathbb{Z}|$ โดยพิจารณาเปรียบเทียบกับกรณีที่ C เป็นเซตย่อยแท้ของ A และ $|C|<|A|$ ซึ่งการพิจารณาแบบนี้ไม่ถูกต้อง ซึ่งจะได้อธิบายต่อไป

ในทางคณิตศาสตร์แล้วเราศึกษาขนาดของเซตภายใต้ข้อตกลงหรือนิยามที่ว่า สำหรับเซต X และ Y ใดๆ $|X|<|Y|$ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง $f:X \rightarrow Y$ การที่มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงจาก X ไปยัง Y นี้สามารถกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่ามีการจับคู่กันพอดีแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างสมาชิกของทั้งสองเซต ซึ่งสำหรับเซต $A=\{1, 2, 3\}$ และ $B=\{a, b, c\}$ ที่กำหนดมาให้ นั้น จะเห็นได้ชัดว่าสมาชิกของเซตทั้งสองสามารถจับคู่กันได้แบบหนึ่งต่อหนึ่งอย่างง่าย ซึ่งสอดคล้องกับนิยามการมีขนาดที่เท่ากันของเซต และสอดคล้องกับความเข้าใจของคนทั่วไปที่ว่าสามารถนับจำนวนสมาชิกของทั้งสองเซตได้เท่ากัน

ในกรณีของ $\mathbb{Z}$ และ E นั้น เราสามารถสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง $f:\mathbb{Z} \rightarrow E$ ได้ กำหนดโดย $f(n)=2n$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{Z}$ ในการแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งนั้น

เราสมมติให้ $a, b \in \mathbb{Z}$ และ $f(a)=f(b)$ จะได้ $2a=2b$ และทำให้ได้ว่า $a=b$ ดังนั้น f เป็น

¹ รองศาสตราจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ซึ่งสามารถแสดงได้โดยพิจารณาแต่ละสมาชิก $b \in \mathbb{Z}$ เนื่องจาก b เป็นจำนวนเต็มคู่ ดังนั้น $\frac{b}{2} \in \mathbb{Z}$ และทำให้ได้ว่า $f(\frac{b}{2}) = 2(\frac{b}{2}) = b$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้น $|\mathbb{Z}| < |\mathbb{E}|$ โดยนิยามการมีขนาดที่เท่ากันของเซต ถึงแม้ว่า $\mathbb{E}$ จะเป็นเซตย่อยแท้ของ $\mathbb{Z}$ ก็ตาม

เหตุการณ์ข้างต้นนี้เป็นสมบัติพิเศษของเซตอนันต์ซึ่งไม่เป็นจริงสำหรับเซตจำกัด และบางตำราจะให้นิยามของเซตอนันต์ว่า X จะเป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ X มีเซตย่อยแท้ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ X จากนิยามของเซตอนันต์ที่อ้างถึงนี้ ปัญหาต่อไปที่น่าพิจารณาก็คือ ถ้า X เป็นเซตอนันต์ และ A เป็นเซตย่อยแท้ของ X แล้ว ขนาดของ A จำเป็นต้องเท่ากับขนาดของ X หรือไม่ เห็นได้ชัดว่าหากเซตย่อยแท้ A ของ X ที่กำลังกล่าวถึงอยู่นี้เป็นเซตจำกัด เราจะไม่สามารถสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง $f: A \rightarrow X$ ได้ นั่นคือ $|A| \neq |X|$ และสำหรับบางเซตย่อยแท้อนันต์ A ของ X ก็ไม่จำเป็นต้องมีขนาดเท่ากับขนาดของ X เช่น เซตของจำนวนนับ $\mathbb{N}$ เป็นเซตย่อยแท้ของเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ แต่ในทางคณิตศาสตร์สามารถพิสูจน์ได้ว่าไม่มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

(ซึ่งไม่ขอกกล่าวถึงรายละเอียดของการพิสูจน์ในที่นี้) ดังนั้น $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ จึงได้ว่า $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

สำหรับคนทั่วไปนั้นการกล่าวถึงค่าอนันต์ก็มักจะนึกถึงการมีอยู่อย่างไม่จำกัด ไม่มีที่สิ้นสุด โดยไม่ได้ศึกษาอะไรต่อไปจากการมีอยู่อย่างไม่จำกัดนั้น แต่มาถึงตอนนี้ผู้อ่านคงพอจะมองเห็นภาพว่าการกล่าวถึงค่าอนันต์ในทางคณิตศาสตร์ จะมีค่าแตกต่างกันไป เช่น $\mathbb{N}$ และ $\mathbb{R}$ ต่างก็เป็นเซตอนันต์ แต่ทั้งสองเซตมีขนาดที่ต่างกัน โดยเราใช้สัญลักษณ์ $\aleph_0$ (aleph null)

แทนขนาดของ $\mathbb{N}$ หรือเซตที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\mathbb{N}$ และใช้สัญลักษณ์ c (cardinality of continuum) แทนขนาดของ $\mathbb{R}$ หรือเซตที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\mathbb{R}$ นั่นคือ $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| = c$ ยิ่งกว่านั้น ค่าอนันต์ทางคณิตศาสตร์ก็ไม่ได้มีเพียง $\aleph_0$ และ c เท่านั้น โดยใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ว่า สำหรับเซต A ใดๆ เซตกำลังของ A (the power set of A) ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $P(A)$ จะมีขนาดมากกว่าขนาดของ A เสมอ (ซึ่งไม่ขอกกล่าวถึงการพิสูจน์ในที่นี้เช่นกัน) ดังนั้น หากเราเริ่มต้นที่ A เป็นเซตอนันต์ จะได้ว่า

$$|A| < |P(A)| < |P(P(A))| < |P(P(P(A)))| < \dots$$

ซึ่งขนาดของเซตกำลังที่เกิดขึ้นใหม่นั้นจะเป็นจำนวนอนันต์ที่มากขึ้นกว่าเดิมเรื่อยๆ นั่นคือ เรามีจำนวนอนันต์ที่แตกต่างกันมากมายไม่จำกัด