ผลเฉลยบางส่วนที่เป็นจำนวนนับของสมการ $x^2-y^2 = (x-y)^3$

ผู้วิจัย รองศาสตราจารย์บุญรัตน์ เกษมพิทักษ์พงศ์[1]

บทคัดย่อ

เป็นที่ประจักษ์ชัดว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนนับของสมการ $x^2-y^2 = (x-y)^3$ นอกจาก (n, n) ซึ่ง n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ แล้วยังมีผลเฉลยอื่นอีกด้วย งานวิจัยนี้ได้หาผลเฉลย (x, y) บางผลเฉลยที่ $x \neq y$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2-y^2 = (x-y)^3$

คำสำคัญ : ผลเฉลย, จำนวนนับ, ความสัมพันธ์

ABSTRACT

It is obvious that (n, n) for any positive integer n is a solution for the equation $x^2-y^2 = (x-y)^3$. In this research, we find some other solutions (x, y) ; $x \neq y$ of the equation $x^2-y^2 = (x-y)^3$

Keywords : Solution, Natural number, Relation

---

[1] รองศาสตราจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงใหม่

บทนำ

สมการ $x^2 - y^2 = (x-y)^3$ นอกจากมี x, y ซึ่งเป็นจำนวนนับใดๆ โดยที่ $x = y$ เป็นผลเฉลยแล้วยังมีค่าของ x และ y อื่นๆ อีกด้วย เช่น x=3 และ y=1 สำหรับค่าของ x และ y ดังกล่าว

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อหาผลเฉลยของสมการ $x^2 - y^2 = (x-y)^3$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนนับ

วิธีดำเนินการวิจัย

กำหนดขั้นตอนในการดำเนินงานไว้ดังนี้

ขั้นแรก ศึกษาความรู้พื้นฐานและทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับผลบวกของลำดับของจำนวนนับแล้ว สังเกตแบบรูป (pattern) ของลำดับของจำนวนนับ **ขั้นที่สอง** ตั้งสมมติฐานและวิเคราะห์จากแบบรูปทั้งหลายที่ได้รวบรวมไว้ **ขั้นสุดท้าย** ทำการพิสูจน์สมมติฐาน

ความรู้พื้นฐาน

ทฤษฎีบท 0 ถ้า n ซึ่งเป็นจำนวนนับแล้ว

$1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ [1], [2]

จากทฤษฎีบท 0 เมื่อ แทนค่า n ด้วยจำนวนนับบางค่าได้ผลดังเช่น

$$1+3=4=2^2$$
$$1+3+5=9=3^2$$
$$1+3+5+7=16=4^2$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2$$
$$1+3+5+7+9+11=36=6^2$$

สังเกตเห็นว่าผลบวกได้จากอนุกรมที่เริ่มจาก 1 และผลบวกของแต่ละแถวเป็นกำลังสองของจำนวนนับ เราสามารถนำตัวเลขในแต่ละแถวมาจัดเรียงให้อยู่ในแบบรูปเชิงสามเหลี่ยมพร้อมทั้งเพิ่มแถวบนสุดอีกแถวหนึ่งโดยให้เป็น 1 จะได้ดังรูปที่ 1

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 3 \\
1 \quad 3 \quad 5 \\
1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \\
1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \\
1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11
\end{array}
$$

รูปที่ 1

นอกจากนี้เราสามารถหาผลบวกซึ่งเป็นกำลังสามของจำนวนนับที่เป็นจำนวนคี่โดยที่แต่ละแถวไม่จำเป็นต้องเริ่มจาก 1 เสมอไป เช่น

$$3+5=8=2^3$$
$$7+9+11=27=3^3$$
$$13+15+17+19=64=4^3$$
$$21+23+25+27+29=125=5^3$$
$$31+33+35+37+39+41=216=6^3$$

และเมื่อนำตัวเลขที่อยู่ในชุดเดียวกันเหล่านั้นมาเขียนเรียงกันในแถวเดียวกัน สำหรับตัวเลขชุดถัดไปให้อยู่ในแถวถัดไปโดยแถวแรกให้เริ่มจาก 1 แถวถัดไปเริ่มจาก 3,7,13,... เป็นเช่นนี้ไปเรื่อยๆ ให้อันดับของแถวเริ่มนับจากแถวบนสุดสามารถจัดให้อยู่ในแบบรูปเชิงสามเหลี่ยม โดยแถวที่ n มีอยู่ n พจน์ได้ดังรูปที่ 2

$$
\begin{array}{cr}
1 & 1 = 1^3 \\
3 \quad 5 & 8 = 2^3 \\
7 \quad 9 \quad 11 & 27 = 3^3 \\
13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 & 64 = 4^3 \\
21 \quad 23 \quad 25 \quad 27 \quad 29 & 125 = 5^3 \\
31 \quad 33 \quad 35 \quad 37 \quad 39 \quad 41 & 216 = 6^3 \\
\vdots &
\end{array}
$$

รูปที่ 2

จำนวนแรกของแต่ละแถวคือ 1, 3, 7, 13, 21, 31 เป็นจำนวนคี่ซึ่งอยู่ในรูปของ 2k+1 ซึ่ง k เป็นจำนวนเต็ม และยังเขียนได้เขียนได้ในรูป m+1 เมื่อ m เป็นจำนวนคู่ ดังนี้

$1 = 0 + 1$

$3 = 2 + 1$

$7 = 6 + 1$

$13 = 12 + 1$

$21 = 20 + 1$

$31 = 30 + 1$

สังเกตเห็นว่า จำนวน m ในแต่ละแถวสามารถเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเต็มสองจำนวนที่เรียงถัดกันและจะได้แบบรูปดังนี้

$1 = 1(0) + 1$

$3 = 2(1) + 1$

$7 = 3(2) + 1$

$13 = 4(3) + 1$

$21 = 5(4) + 1$

$31 = 6(5) + 1$

เนื่องจากแบบรูปดังกล่าวเป็นแบบรูปที่แสดงค่าของจำนวนแรกของแต่ละแถวในรูปที่ 2 จึงได้ว่า จำนวนแรกของแถวที่ n ในรูปที่ 2 เขียนได้ในรูป $n(n-1)+1$ ซึ่งเท่ากับ n^2-n+1

จากรูปที่ 2 สังเกตเห็นว่าผลบวกของจำนวนทั้งหลายในแถวที่ n มีค่าเท่ากับ n^3 แถวที่ 1 มี 1 พจน์ แถวที่ 2 มี 2 พจน์ แถวที่ 3 มี 3 พจน์ เป็นเช่นนี้เรื่อยไปจนถึงแถวที่ n มี n พจน์ และเราสามารถสรุปผลบวกในแต่ละแถวดังทฤษฎีบท 1 ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 สำหรับแถวที่ n ใด ๆ ซึ่งประกอบด้วยชุดของจำนวน

$$(n^2-n+1), (n^2-n+3), (n^2-n+5), \ldots, (n^2-n+(2n-1))$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ จะได้ว่า

$$(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+(n^2-n+5)+ \ldots +(n^2-n+(2n-1)) = n^3$$

หมายเหตุ ด้านซ้ายมือของสมการเป็นผลบวกของพจน์ต่างๆ จำนวน n พจน์

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 1

พิจารณาด้านซ้ายมือของสมการ คือ

$$\begin{aligned}
&(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+(n^2-n+5)+ \ldots +(n^2-n+(2n-1))\\
&= (n^2-n)n+(1+3+5+(2n-1))\\
&= (n^2-n)n+n^2\\
&= n^3-n^2+n^2\\
&= n^3
\end{aligned}$$

เมื่อนำรูปที่ 1 และ รูปที่ 2 มาพิจารณาหาความสัมพันธ์ของจำนวนทั้งหลายที่ปรากฏในแถวต่างๆ สังเกตเห็นว่าแถวที่ 2 ในรูปที่ 2 ได้จากการตัดตัวเลขในแถวที่ 1 ของรูปที่ 1 ออกจากแถวที่ 3 ของรูปที่ 1 นั่นคือ

แถวที่ 3 ของรูปที่ 1 ประกอบด้วยตัวเลข 1, 3, 5

แถวที่ 1 ของรูปที่ 1 ประกอบด้วยตัวเลข 1

เมื่อตัดตัวเลขที่ปรากฏในแถวที่ 1 ออกจากแถวที่ 3 จึงเหลือ 3, 5 ซึ่งเป็นอย่างเดียวกันกับตัวเลขในแถวที่ 2 ของรูปที่ 2

สำหรับแถวที่ 3 ในรูปที่ 2 เกี่ยวข้องกับแถวบางแถวในรูปที่ 1 ดังนี้

แถวที่ 6 ของรูปที่ 1 ประกอบด้วยตัวเลข 1, 3, 5, 7, 9, 11

แถวที่ 3 ของรูปที่ 1 ประกอบด้วยตัวเลข 1, 3, 5

เมื่อตัดตัวเลขที่ปรากฏในแถวที่ 3 ออกจากแถวที่ 6 จึงเหลือ 7, 9, 11 ซึ่งเป็นอย่างเดียวกันกับตัวเลขในแถวที่ 3 ของรูปที่ 2

สำหรับแถวอื่นๆ ในรูปที่ 2 ก็หาได้โดยการตัดแถวที่เหมาะสมกันในรูปที่ 1

เนื่องจากผลบวกของทุกจำนวนในแถวใดๆ ของรูปที่ 1 เป็นกำลังสองของจำนวนนับและผลบวกของทุก

จำนวนในแถวใดๆ ของรูปที่ 2 เป็นกำลังสามของจำนวนนับ ดังนั้นเมื่อตัดแถวใดแถวหนึ่งด้วยตัวเลขที่มีในแถวอื่นที่เหมาะสมกันในรูปที่ 1 แล้วได้ผลเป็นแถวใดแถวหนึ่งในรูปที่ 2 จึงสรุปได้ว่า $x^2 - y^2 = z^3$ สำหรับบางค่าของ x, y, z ที่เป็นจำนวนนับ ดังเช่น

$$3^2 - 1^2 = 2^3 \qquad \text{..................(3.1)}$$

$$6^2 - 3^2 = 3^3 \qquad \text{..................(3.2)}$$

$$10^2 - 6^2 = 4^3 \qquad \text{..................(3.3)}$$

$$15^2 - 10^2 = 5^3 \qquad \text{..................(3.4)}$$

$$\vdots$$

สังเกตค่าของ z กับค่าของ x และ y ในแต่ละสมการพบว่า z = x – y เช่นสมการ (3.1) มี x = 10, y = 6, z = 4 แต่ในกรณีที่ค่าของ x หรือ y ค่าใดค่าหนึ่งหรือทั้งสองค่าเปลี่ยนไป เช่น x = 8, y = 6 ทำให้ $x^2 - y^2 = 8^2 - 6^2 = 28$ ซึ่งไม่มี z ที่เป็นจำนวนนับโดยที่ $z^3 = 28$ ดังนั้น เพื่อให้ได้ z ที่เป็นจำนวนนับโดยที่ $x^2 - y^2 = z^3$ จึงต้องได้ค่าของ x และ y เป็นจำนวนนับที่เหมาะสมกัน

จากการสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างค่าของ x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 - y^2 = z^3$ โดยการนำชุดของสมการข้างต้นมาเขียนโดยให้พจน์ต่างๆ ทางด้านซ้ายมือของสมการอยู่ในรูปสัญลักษณ์แสดงจำนวนของการจัดหมู่(combination) ปรากฏดังนี้

$$\binom{3}{2}^2 - \binom{2}{2}^2 = 2^3$$

$$\binom{4}{2}^2 - \binom{3}{2}^2 = 3^3$$

$$\binom{5}{2}^2 - \binom{4}{2}^2 = 4^3$$

$$\binom{6}{2}^2 - \binom{5}{2}^2 = 5^3$$

ได้ข้อสังเกตว่าแต่ละสมการอยู่ในรูป

$$\binom{t+1}{2}^2 - \binom{t}{2}^2 = t^3$$

ดังนั้นเมื่อให้ x และ y มีความสัมพันธ์กันโดยอาศัย t เป็นตัวแปรเสริมดังนี้ $x = \binom{t+1}{2}$ และ $y = \binom{t}{2}$ จะได้ว่า $x - y = t$ และจะได้ว่า $x^2 - y^2 = (x-y)^3$ ในกรณีที่ $x \neq y$ นั่นคือ $x - y \neq 0$ จึงได้ว่า $x + y = (x-y)^2$ และสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2 สำหรับจำนวนนับ x, y ถ้า $x = \binom{t+1}{2}$ และ $y = \binom{t}{2}$ เมื่อ t เป็นจำนวนนับและ $t \geq 2$ แล้ว $x + y = (x-y)^2$

การพิสูจน์

พิจารณาด้านซ้ายมือของสมการคือ $x + y$

$$= \binom{t+1}{2} + \binom{t}{2}$$

$$= \frac{(t+1)t}{2} + \frac{t(t-1)}{2}$$

$$= \frac{t^2 + t}{2} + \frac{t^2 - t}{2}$$

$$= t^2$$

พิจารณาด้านขวามือของสมการคือ $(x-y)^2$

$$= \left[\binom{t+1}{2} - \binom{t}{2}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(t+1)t}{2} - \frac{t(t-1)}{2}\right]^2$$

$$= t^2$$

ดังนั้น $x+y=(x-y)^2$ สำหรับ

$$x=\binom{t+1}{2} \text{ และ } y=\binom{t}{2} \quad \text{เมื่อ} \quad t\geq 2$$

จากทฤษฎีบท 2 กล่าวได้ว่า (x, y) ซึ่งอยู่ในรูป $\left(\binom{t+1}{2},\binom{t}{2}\right)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$x+y=(x-y)^2$$

ผลการวิจัย

ผลเฉลย (x,y) ของสมการ $x^2-y^2=(x-y)^3$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนนับ ในกรณีที่ $x=y$ ย่อมเห็นได้ชัดแจ้งว่า (x,y) ซึ่งอยู่ในรูป (n,n) เป็นผลเฉลยของสมการดังกล่าวเมื่อ n เป็นจำนวนนับใด ๆ

ในกรณีที่ $x\neq y$ นั่นคือ $x-y\neq 0$ จึงได้ว่า $x^2-y^2=(x-y)^3$ สมมูลกับ $x+y=(x-y)^2$ ดังนั้น (x, y) ซึ่งอยู่ในรูป $\left(\binom{t+1}{2},\binom{t}{2}\right)$ เมื่อ $t\geq 2$ จึงเป็นผลเฉลยของสมการ $x^2-y^2=(x-y)^3$ สำหรับผลเฉลย (x,y) ดังกล่าวเมื่อสลับค่าระหว่าง x และ y ภายในคู่อันดับ สามารถแสดงได้ว่า (x,y) ซึ่งอยู่ในรูป $\left(\binom{t}{2},\binom{t+1}{2}\right)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2-y^2=(x-y)^3$ ด้วย

นอกเหนือจากทั้งสองกรณีดังกล่าว ไม่พบว่ามีผลเฉลย (x, y) โดยที่ทั้ง x และ y เป็นจำนวนนับ

สรุปผลการวิจัยและอภิปรายผล

ผลเฉลยบางส่วนของสมการ $x^2-y^2=(x-y)^3$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนนับ จำแนกได้เป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 $x=y$ ซึ่งเห็นได้โดยชัดแจ้ง นั่นคือ (n,n) เป็นผลเฉลยของสมการ เมื่อ n เป็นจำนวนนับใดๆ

กรณีที่ 2 $x\neq y$ อาศัยการสังเกตแบบรูปของลำดับต่าง ๆ ซึ่งผลบวกของทุกจำนวนในลำดับเป็นกำลังสองของจำนวนนับที่สัมพันธ์กับแบบรูปของลำดับซึ่งผลบวกของทุกจำนวนในลำดับเป็นกำลังสามของจำนวนนับประกอบกับอาศัยทฤษฎีบท 0 ทฤษฎีบท 1 และ ทฤษฎีบท 2 ทำให้ สรุปได้ว่า (x, y) ในรูป $\left(\binom{t+1}{2},\binom{t}{2}\right)$ หรือ $\left(\binom{t}{2},\binom{t+1}{2}\right)$ เมื่อ $t\geq 2$ เป็นผลเฉลยของสมการ $x^2-y^2=(x-y)^3$

นอกเหนือจากทั้งสองกรณีดังกล่าวไม่พบว่ามีผลเฉลย (x, y) อย่างอื่นอีกของสมการ $x^2-y^2=(x-y)^3$ โดยที่ทั้ง x และ y เป็นจำนวนนับ

ข้อเสนอแนะ

จำนวนที่อยู่ในรูปกำลังสองของจำนวนนับกับกำลังสามของจำนวนนับอาจมีความสัมพันธ์กันในรูปแบบสมการอื่นๆ อีก จึงน่าจะศึกษาหาความสัมพันธ์ในแบบอื่น ต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณรองศาสตราจารย์นิยม ยอดมนต์ ที่ได้ให้ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะอันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการทำงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

[1] Harshbarger, Ronald J. and Reynolds, James J. (1987). **Algebra and Trigonometry,** Wadsworth,Inc., California.

[2] Tattersall, James J. (1999). **Elementary Number Theory in Nine Chapters.** Cambridge University Press. Cambridge.